Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen sommer 1989

Matematik 3 GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Sættet består af 4 opgaver med tilsammen 10 spørgsmål. En besvarelse anses kun for fuldstændig, såfremt samtlige 10 spørgsmål er korrekt besvarede.

Opgave 1

Lad

$$X(u,v) = (3u + 4v\,,\; u - v\,, 3u^2 - 4v^2 + u \cdot v)\,,\; (u,v) \in \mathbf{R}^2\,.$$

1° Bevis, at $S = X(\mathbf{R}^2)$ er en regulær flade og bestem koefficienterne til den første fundamentalform i et vilkårligt punkt på S.

2° Bestem koefficienterne til den anden fundamentalform og bevis, at alle punkter på S er hyperbolske.

3° De fire kurver $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3$ og $\tilde{\beta}_4$ på S bestemt ved

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_1(t) &= X(4-4t, -3+3t) & t &\in [0,1]\\
\tilde{\beta}_2(t) &= X(t,t) & t &\in [0,1]\\
\tilde{\beta}_3(t) &= X(1+4t, 1-3t) & t &\in [0,1]\\
\tilde{\beta}_4(t) &= X(5-t, -2-t) & t &\in [0,1]
\end{aligned}$$

udgør siderne i en firkant R_4 på S. Bestem de ydre vinkler i hjørnerne af R_4.

4° Angiv integralet over R_4 af Gauss-krumningen K.

Opgave 2

Las S være omdrejningsfladen der fremkommer ved rotation om z-aksen af en regulær kurve C i xz-planen. Lad

$$x = f(v)\,,\; z = g(v)\,,\; a < v < b$$

være en parametrisering af C og antag, at $f(v) > 0$ samt $(f')^2(v) + (g')^2(v) = 1$ for alle $v \in \,]a,b[$. Antag yderligere at

$$(f(v_1), g(v_1)) = (f(v_2), g(v_2)) \Rightarrow v_1 = v_2$$

og lad endelig u betegne drejningsvinklen omkring z-aksen.

Opgave 2 fortsættes på side 2

Vi betragter i denne opgave en generalisation af begrebet loxodrom til S; d.v.s. regulære kurver på S, stadig kaldet loxodromer, der skærer meridianerne $u =$ konstant i en konstant vinkel β.

Lad

$$X(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

med $(u,v) \in U =]0,2\pi[\times]a,b[$ være en sædvanlig parametrisering og lad $\alpha(t) = X(u(t)), v(t))$ være en loxodrom i $X(U)$.

1° Bevis, at hvis α er parametriseret ved kurvelængde, da er $v' = \cos\beta$.

2° Antag at $v' > 0$ og at $u' \geq 0$ samt at α stadig er parametriseret ved kurvelængde. Bevis, at den kovariant afledede af vektorfeltet X_v langs α er givet ved

$$\left(\frac{\sin\beta f'}{f^2}\right) \cdot X_u \,.$$

Opgave 3

Lad S være halvkeglen (fraregnet toppunktet)

$$z = +k\sqrt{x^2+y^2}\,,\ (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Lad 2α $(0 < 2\alpha < \pi)$ være vinklen i toppunktet af keglen (d.v.s. $k = \operatorname{cotan}\alpha$). Antag at $\sin\alpha = \frac{1}{12}$ og lad $p \in S$.

1° Hvor mange geodætiske kurver på S findes der, der skærer sig selv i p? (Begrund svaret.)

2° Lad p_1, p_2, p_3 være toppunkterne i en simpel trekant $T \subset S$ og antag, at siderne fra p_1 til p_2 og fra p_2 til p_3 er geodæter. Lad $\alpha : [s_0, s_1] \to S$ være den sidste side. Det antages, at $\alpha(s_0) = p_3$, $\alpha(s_1) = p_1$ samt at $\alpha(s) = \alpha(\tilde{s}) \Rightarrow s = \tilde{s}$. Det oplyses at de indre vinkler i T alle er $\frac{\pi}{6}$. Bestem integralet af den geodætiske krumning af α fra S_0 til S_1, idet det oplyses, at α er parametriseret ved kurvelængde og er positivt orienteret.

Opgave 4

Lad $X(\theta,\varphi) = (\sin(\theta\cdot\pi)\cos\varphi,\ \sin(\theta\cdot\pi)\sin\varphi,\ \cos(\theta\cdot\pi))$ være en parametrisering af $S = S^2$, defineret på $U = \{(\theta,\varphi) \mid 0 < \theta < 1 \text{ og } 0 < \varphi < 2\pi\}$. På $X(U)$ defineres afbildningen F ved

$$F(p) = X(\theta^3,\varphi) \qquad \text{hvis } p = X(\theta,\varphi)\,.$$

Opgave 4 fortsættes på side 3

1° Bevis, at F er en diffeomorfi af $X(U)$ på $X(U)$ og bestem differentialet af F i punktet svarende til $\theta = \frac{1}{2}$ og $\varphi = \pi$.

2° Det oplyses, at F er restriktionen til $X(U)$ af en differentiabel afbildning $\tilde{F} : S^2 \to S^2$ bestemt ved, at

$$\tilde{F}(\sin(\theta \cdot \pi), 0, \cos(\theta \cdot \pi)) = (\sin(\theta^3 \cdot \pi), 0, \cos(\theta^3 \cdot \pi))$$

for $0 \leq \theta \leq 1$. (Det ønskes ikke bevist, at $\tilde{F}$ er differentiabel). Bestem differentialet $d\tilde{F}$ af $\tilde{F}$ i såvel nordpolen $P_N = (0, 0, 1)$ som i sydpolen $P_S = (0, 0, -1)$.