Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1988-1989

Matematik 3GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.
Sættet består af 3 opgaver med tilsammen 10 spørgsmål. En besvarelse anses kun for fuldstændig, såfremt samtlige 10 spørgsmål er korrekt besvarede.

Opgave 1

I denne opgave betegner S_1 og S_2 regulære flader. Lad U være en åben delmængde af $\mathbf{R}^2$ så $(0,0) \in U$ og lad $X : U \to \mathbf{R}^3$ være givet ved

$$X(u,v) = (e^u, e^v, u-v).$$

Det oplyses, at (X, U) er en parametrisering af S_1.

1° Find koefficienterne E, F og G til den første fundamentalform i et vilkårligt punkt i $X(U)$.

2° Beregn Gauss-krumningen K i et vilkårligt punkt i $X(U)$.

3° Bevis, at man til ethvert punkt $p \in X(U)$ kan finde en åben omegn V af p i S_1, som samtidigt fremkommer som graf på følgende tre måder: $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ og $x = h(y,z)$ for passende valgte differentiable funktioner f, g og h.

4° Lad F betegne en differentiabel funktion fra S_1 til S_2. Lad $q_1 = X(0,0)$ og $q_2 = F(q_1)$. Antag, at $(\tilde{X}, \tilde{U})$ er en parametrisering af S_2 så $(0,0) \in \tilde{U}$ og $\tilde{X}(0,0) = q_2$. Det oplyses nu, at $\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X$ afbilder kurven $(t, 2t) \cap U$ i kurven $(-t, -2t) \cap \tilde{U}$ og kurven $(t, -2t) \cap U$ i kurven $(t, -2t) \cap \tilde{U}$. Find differentialet af F i q_1.

Opgave 2

Lad $a > 0$ og sæt

$$S = \{X(u,v) = (v\cos u, v\sin u, au) \mid u \in \mathbf{R} \text{ og } v \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$$

være en parametriseret flade (helicoiden fraregnet z-aksen) Lad $0 < v_1 < v_2$ og sæt $B = X([0, 2\pi] \times [v_1, v_2])$. Randen af B består da af fire parametriserede regulære kurver.

1° Beskriv paralleltransport langs hver af disse kurver.

2° Udregn arealet af B samt integralet af Gauss-krumningen over B (se evt. spørgsmål 3°).

Opgave 2 fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1988-1989
Matematik 3GE

3° Lad $\tilde{B}$ være delmængden af katenoiden ("catenoid") begrænset af to forskellige paralleller. Udregn arealet af $\hat{B}$ samt integralet af Gauss-krumningen over $\tilde{B}$.

4° Lad γ være en geodæt på S der skærer skruelinien $u \to X(u, v_1)$ i vinklen θ_1 og skruelinien $u \to X(u, v_2)$ i vinklen θ_2. Sæt $a = 1$. Bevis, at

$$|\sqrt{1+v_1^2}\cos\theta_1| = |\sqrt{1+v_2^2}\cos\theta_2|.$$

Opgave 3

Lad S_1 betegne fladen $z = x^2 + y^2$, lad S_2 betegne fladen $z = x^2 + y^2 + 2$, og lad S_3 betegne fladen $z = x^2 - y^2$.

1° Bevis, at restriktionen af funktionen $F(x, y, z) = |z|$ til S_1 er differentiabel overalt, og at restriktionen til S_2 af funktionen $G(x, y, z) = \frac{1}{|z|}$ ligeledes er differentiabel overalt.

2° Bevis, at restriktionen af funktionen $H(x, y, z) = |x|$ til hverken S_1, S_2 eller S_3 er differentiabel i det punkt for hvilket $(x, y) = (0, 0)$.