Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommer 1988

Matematik 3GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Sættet består af 3 opgaver med tilsammen 10 spørgsmål. En besvarelse anses kun for fuldstændig, såfremt samtlige 10 spørgsmål er korrekt besvarede.

Opgave 1

I denne opgave betegner S_1, S_2 og S_3 regulære sammenhængende flader.

1°. På S_1 er alle punkter elliptiske. Bevis, at Gauss-afbildningen overalt er en lokal diffeomorfi.

2° På S_2 er nogle punkter elliptiske og nogle er hyperbolske. Bevis, at der findes punkter i hvilke Gauss-afbildningen ikke er en lokal diffeomorfi.

3° Det gælder for alle $p \in S_3$ at enhver retning i $T_p(S_3)$ er en hovedretning. Beskriv S_3.

Opgave 2

1° Bevis, at

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$$

er en regulær flade, og at afbildningen

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^4+y^4+z^4)^{1/4}}, \frac{y}{(x^4+y^4+z^4)^{1/4}}, \frac{z}{(x^4+y^4+z^4)^{1/4}}\right)$$

er en diffeomorfi af enhedskugleoverfladen S^2 på S.

2° Udregn koefficienterne til den første fundamentalform til S i punktet $p = (0,0,1)$ i en passende parametrisering.

3° Bevis, at p er et planpunkt ("planar point").

Opgave 3

Lad S være en regulær flade og lad (X, U) være en parametrisering af S med

$$U = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u > 0 \text{ og } v > 0\}.$$

 Opgave 3 fortsættes på side 2

Antag videre, at koefficienterne til den første fundamentalform i denne parametrisering er givet ved

$$E = 1/2\,,\ F = 0 \text{ og } G = \frac{u^2}{8 \cdot v^2}\,.$$

1° Betragt kurven α på $S \cap X(U)$ hvis udtryk i den givne parametrisering er $(u(t)\,, v(t)) = (t\,, t^2/4)$ (med $t > 0$). Bestem skæringsvinklen mellem α og koordinatkurven svarende til $u = 1$.

2° Bevis, at vinkelsummen af enhver geodætisk trekant T indeholdt i $X(U)$ er π.

3° Bevis, at vektorfeltet $\omega(t)$ langs α givet ved $(X_u\,, X_v)$-koordinaterne

$$\left(3\sqrt{2}\cos(\ln t)\,, \frac{-3t}{\sqrt{2}}\sin(\ln t)\right) \text{ i } T_{\alpha(t)}(S)$$

er parallelt langs α.

4° Bestem den geodætiske krumning (op til et fortegn) af α i punktet svarende til $t = e^{\frac{\pi}{2}}$.