Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1987-1988

Matematik 3GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Sættet består af 3 opgaver med tilsammen 10 spørgsmål. En besvarelse anses for fuldstændig, såfremt 8 af sættets ialt 10 spørgsmål er korrekt besvarede.

Opgave 1

Lad f og g være differentiable funktioner fra $\mathbf{R}^2$ til $\mathbf{R}$. Betragt fladerne

$$S_1 = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$$

og

$$S_2 = \{(u, g(u, v), v) \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2\}.$$

1°. Bevis, at S_1 og S_2 er diffeomorfe.

2°. Bevis, at hvis $g = f + c_1$ eller hvis $g = -f + c_2$, hvor c_1 og c_2 betegner reelle konstanter, da er S_1 og S_2 isometriske.

3°. Begrund, at også andre funktioner g, end de i spørgsmål 2° nævnte, definerer flader S_2, der er isometriske med den fastholdte flade S_1.

Opgave 2

To regulære flader, S_1 og S_2, antages at skære hinanden langs en kurve C således, at de aldrig tangerer hinanden. (Skæringsvinklen $\varphi(p)$ opfylder altså $0 < |\varphi(p)| < \pi$ for alle $p \in C$). Det kan antages, at C er sporet af en regulær kurve α, parametriseret ved kurvelængde.

1°. Bevis, at hvis C er en geodæt både på S_1 og S_2, da er C et liniestykke.

2°. Bevis, at hvis C er en asymptotisk kurve på både S_1 og S_2, da er C et liniestykke.

Opgave 3

Lad (X, U) være en ortogonal parametrisering af en regulær flade S, og betragt på $X(U)$ vektorfelterne X_u og X_v.

 Opgave 3 fortsættes på side 2

1°. Udregn den kovariant afledede af X_u relativ til X_v i et vilkårligt punkt $p \in X(U)$.

2°. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse på funktionerne E og G for, at X_u er parallel langs samtlige koordinatkurver.

Opgave 4

I denne opgave betragtes loxodromer på enhedskugleoverfladen $S = S^2$. Disse er, som bekendt, kurver, der skærer meridianerne under en konstant vinkel β. Lad

$$X(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$$

betegne en sædvanlig parametrisering af S^2.

1°. Bevis, at paralleltransport langs en loxodrom fra et punkt $p_o = X(u_o, v_o)$ til et punkt $p_1 = X(u_1, v_1)$ er givet ved en drejning af parallelfeltet i forhold til X_u på

$$\varphi = \pm \tan(\beta) \cdot \ln\left(\frac{\sin v_1}{\sin v_o}\right).$$

2°. Lad $q_o = (0,1,0)$ og betragt den loxodrom $\tilde{\alpha}$, der starter i q_o med en tangentvektor $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Bestem den geodætiske krumning af $\tilde{\alpha}$ i et vilkårligt punkt. (Benyt evt. spørgsmål 1°.)

3°. Lad $q_1 = (x_1, 0, z_1)$ være det første skæringspunkt mellem $\tilde{\alpha}$ (spørgsmål 2°) og xz-planen og lad $N = (0,0,1)$. Betragt trekanten T hvis hjørner er N, q_o og q_1, og hvis sider er: loxodromen fra q_o til q_1, storcirklen fra q_1 til N og storcirklen fra N til q_o. Bestem arealet af T.