Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1987

MATEMATIK 3 GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Sættet består af 3 opgaver med tilsammen 10 spørgsmål. En besvarelse anses for fuldstændig, såfremt 8 af sættets ialt 10 spørgsmål er korrekt besvarede.

OPGAVE 1

Lad $\underline{\bar{X}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$\underline{\bar{X}}(x,y) = (\tfrac{1}{2}\, y^2\cos x\ ,\ x+y\ ,\ x-y)\ .$$

1°. Vis, at $\underline{\bar{X}}$ er en parametriseret flade og udregn koefficienterne til den anden fundamentalform i et vilkårligt punkt i sporet

$$S = \underline{\bar{X}}(\mathbb{R}^2) \text{ af } \underline{\bar{X}}\ .$$

2°. Angiv i xy-planen de punkter der afbildes i henholdsvis de hyperbolske og parabolske punkter på S.

3°. Angiv i punktet $p_o = \underline{\bar{X}}(\pi/2, 1)$ hovedkrumningerne og hovedretningerne.

OPGAVE 2

Lad

$$x = f(v)\ ,\ z = g(v)\ ,\ a<v<b$$

være parametriseringen af en regulær kurve C xz-planen. Antag at $f(v)>0$ og $v_1 < v_2 \Rightarrow g(v_1) < g(v_2)$. Videre gøres den simplificerende antagelse, at C ved (f,g) er parametriseret ved kurvelængde. Lad $S \subset \mathbb{R}^3$ være omdrejningsfladen der fremkommer ved rotation af C om z-axen.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedsekssamen, sommeren 1987

1°. Lad $p \in S$ ligge på en parallel svarende til en værdi af v for hvilken $g'(v) \neq 0$. Beskriv, f.eks. ved indførelsen af en hjælpeflade, paralleltransportafbildningen fra $T_p(S)$ til $T_p(S)$ langs denne parallel.

2°. Beskriv den tilsvarende afbildning i et punkt svarende til et v for hvilket $g'(v) = 0$.

3°. Vælg den orientering af S der svarer til den udadrettede normal, og udregn den geodætiske krumning af en vilkårlig parallel i et vilkårligt punkt.

4°. Lad S_1 være den del af S der ligger mellem de to paralleller svarende til v_1 og v_2 ; $a < v_1 < v_2 < b$.
Udregn integralet af Gausskrumningen over S_1.

5°. Lad S_1^+ være den del af fladen S_1 fra spørgsmål 4° der ligger i kvadranten $x > 0$ og $y > 0$. Bevis, at

$$4 \int_{S_1^+} K dt = \int_{S_1} K dt ,$$

hvor K betegner Gausskrumningen.

OPGAVE 3

1°. Begrund, at $S_o = \{(x,y,z) \mid \sin x + \sin y + \sin z = 0\}$ er en regulær flade.

2°. Lad $S(\frac{\pi}{4})$ være overfladen af kuglen med centrum i $(0,0,0)$ og radius $\frac{\pi}{4}$ og lad $\tilde{S}$ betegne billedet af $S(\frac{\pi}{4})$ under afbildningen

$$(x,y,z) \to (\sin x, \sin y, \sin z) .$$

Bevis, at $\tilde{S}$ er en regulær flade.