Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1986/87

# MATEMATIK 3 GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Sættet består af 3 opgaver med tilsammen 10 spørgsmål. En besvarelse anses for fuldstændig, såfremt 8 af sættets ialt 10 spørgsmål er korrekt besvarede.

## Opgave 1

1.° Lad $S$ være en regulær flade og lad $p \in S$. Vis, at der findes en koordinatomegn $X(U)$ om $p$, for hvilken $U \subseteq \mathbb{R}^2$ er en åben cirkelskive.

2.° Vi vil sige, at to regulære flader, $S_1$ og $S_2$, er stærkt lokalt diffeomorfe, såfremt der for alle punktpar $(p, q) \in S_1 \times S_2$ findes en diffeomorfi af en omegn af $p$ på en omegn af $q$. Vis, at alle regulære flader parvist er stærkt lokalt diffeomorfe.

(Opgavesættet fortsættes)

## Opgave 2

Betragt cirklen $S^1$ i yz-planen med centrum i $(0,2,0)$ og radius 1. Roteres denne om z-aksen, fremkommer en torus, som vi vil kalde $T$. Betragt endvidere cylinderen $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 4\}$. Lad

$$C_1 = S \cap T \cap \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

$$C_2 = S \cap T \cap \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 0\}$$

$$C_3 = T \cap \{(x,y,z) \mid y = 0,\ x \geq 0 \text{ og } x^2+y^2 \geq 4\}$$

$$C_4 = T \cap \{(x,y,z) \mid x = 0,\ y \geq 0 \text{ og } x^2+y^2 \geq 4\}.$$

1.° $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ udgør en stykvis differentiabel kurve på $T$ (ønskes ikke bevist). Lad $\{p\} = C_1 \cap C_3$. Paralleltransport fra $T_p(T)$ til $T_p(T)$ langs denne lukkede kurve er da en lineær afbildning. Bestem denne.

2.° Vælg en orientering på $T$ og lad $C$ være positivt orienteret. Angiv for vilkårlige punkter på hver af de fire kurver $C_1, C_2, C_3$ og $C_4$ den geodætiske krumning med fortegn.

3.° Beregn integralet af Gauss-krumningen over den del af $T$ der ligger udenfor $S$; d.v.s., hvor $x^2+y^2 \geq 4$.

(Opgavesættet fortsættes)

## Opgave 3

Lad $g$ og $h$ være differentiable funktioner på $\mathbb{R}$.
Lad $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være defineret ved

$$X(x,y) = (x+g(y)\ ,\ y, h(x))\ .$$

1° Vis, evt. ved et naturligt parameterskift, at sporet $S(g,h) = X(\mathbb{R}^2)$ er en regulær flade.

2° Udregn koefficienterne til den første og den anden fundamentalform på $S(g,h)$

Fra nu af antages, at $g \equiv 0$.

3° Find samtlige Christoffelsymboler for $S(0,h)$ parametriseret ved $X$.

4° Lad $C$ være kurven, der fremkommer ved skæring af $S(0,h)$ med xz-planen. Vis, at man ved bl.a. at parametrisere $C$ ved buelængde, kan afbilde $S(0,h)$ isometrisk på $\mathbb{R}^2$.

5° Lad $s(t)$ betegne buelængden af $C$ regnet fra et punkt $(x_0, 0, h(x_0))$, og lad $t(s)$ betegne den omvendte funktion til $s$. Vis, at $\beta(s) = (t(s), 0, h(t(s)))$ er en geodætisk kurve på $S(0,h)$.