Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1986

MATEMATIK 3 GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Sættet består af 3 opgaver med tilsammen 11 spørgsmål. En besvarelse anses for fuldstændig, såfremt 9 af sættets ialt 11 spørgsmål er korrekt besvarede.

Opgave 1

Lad α være en simpel regulær kurve i xy-planen parametriseret ved kurvelængde. (Hermed menes bl.a., at α skal være lukket.) Gennem hvert punkt på sporet for α tegnes en linie parallel med z-aksen; foreningsmængden af samtlige sådanne linier betegnes S_α.

1°. Vis, at S_α er en regulær flade.

2°. Vis, at fællesmængden mellem S_α og en plan parallel med xy-planen i højden $z \in \mathbb{R}$ er en geodætisk kurve.

3°. Lad nu S_β fremkomme på tilsvarende vis fra en tilsvarende kurve β af samme længde. Bevis, at S_α og S_β er isometriske.

4°. Lad p være et vilkårligt punkt på S_α. Angiv samtlige geodætiske kurver på S_α gennem p i en passende valgt omegn af p.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2

Betragt den regulære flade (en ellipsoide)

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\},$$

hvor $a = 5/4$, $b = 1$ og $c = (5\cdot 9)/(16\cdot 4)$. Med p_0 betegnes punktet $(1,0,(a^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot c/a)$ på S.

1°. Angiv tangentplanen til S gennem p_0.

2°. Angiv koefficienterne til den anden fundamentalform i p_0 i en passende valgt parametrisering.

3°. Angiv hovedkrumningerne og hovedretningerne i p_0.

4°. Med γ betegnes kurven på S, der fremkommer som fællesmængden af S og planen gennem p_0 parallel med xy-planen. Find den geodætiske krumning af γ i p_0.

5°. Begrund, at integralet af Gauss-krumningen over den del af S, der ligger i oktanten $O = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ og } z \geq 0\}$, er lig $\pi/2$.

Opgave 3

Lad S_1 og S_2 betegne regulære flader i $\mathbb{R}^3$. Lad F være en diffeomorfi af S_1 på S_2 og lad $p_1 \in S_1$.

(Opgaven fortsættes)

1°. Vis, at hvis $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S_1$ er en parametrisering med $p_1 \in X(U)$, da findes en parametrisering $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$ med $F(p_1) \in Y(V)$, så $\forall q \in X(U) : dF_q : T_q(S_1) \to T_{F(q)}(S_2)$ opfylder

$$dF_q = \mathbb{1} ,$$

hvor $\mathbb{1}$ betegner den identiske fbildning, og hvor samtlige tangentrum identificeres med $\mathbb{R}^2$ udfra de givne parametriseringer.

2°. Antag, at A er en isometri af $\mathbb{R}^3$ på $\mathbb{R}^3$. Bevis, at $A(S_1)$ er en regulær flade.