Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1985/86

MATEMATIK 3 GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Sættet består af 3 opgaver med tilsammen 11 spørgsmål. En besvarelse anses for fuldstændig, såfremt 9 af sættets ialt 11 spørgsmål er korrekt besvarelse.

Opgave 1

Lad α være en simpel* regulær kurve i xy-planen parametriseret ved kurvelængde. Vi betegner sporet af en vilkårlig sådan kurve med C_α. Forbindes nu hvert punkt p på C_α med punktet $T = (0,0,1)$ i $\mathbb{R}^3$ ved hjælp af et ret liniestykke $\ell(p,T)$ fremkommer, idet man ser bort fra endepunkterne af liniestykkerne, en flade S_α.

1°. Vis, at S_α er en regulær flade.

2°. Vis, at fællesmængden mellem S_α og en plan parallel med xy-planen i højden $z \in]0,1[$ er sporet af en simpel regulær kurve, og angiv en parametrisering ved kurvelængde af denne.

3°. Lad nu $\alpha,\beta\colon [0,1] \to$ xy-planen være to simple regulære kurver parametriserede ved kurvelængde. Bevis, at S_α og S_β er diffeomorfe.

4°. Lad $C_{\alpha_1} = \{(x,y) \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ fremkomme som sporet af en regulær simpel kurve α_1, og lad $C_{\alpha_2} = \{(x,y) \mid x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1\}$ fremkomme som sporet af en tilsvarende kurve α_2. Bevis, at S_{α_1} og S_{α_2} er isometriske.

* altså bl.a. lukket

Opgavesættet fortsættes

Opgave 2

Betragt den regulære flade (en del af hyperboloiden)

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{og} \quad x > 0\} .$$

Lad α_1 være kurven på S der fremkommer ved skæring af S med xy-planen, og lad α_2 være kurven der fremkommer ved skæring med planen $P = \{(x,y,z) \mid x = y\}$. Betragt punkterne $p_1 = (1,0,0)$, $p_2 = (1,1,1)$ og $p_3 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. Forbind nu p_1 med p_2 ved hjælp af en ret linie, og forbind videre p_3 med henholdsvis p_1 og p_2 via henholdsvis α_1 og α_2.

1^o. Vis, at der derved er konstrueret en geodætisk trekant $T(p_1,p_2,p_3)$ på S.

2^o. Angiv de indre vinkler i $T(p_1,p_2,p_3)$.

3^o. Angiv integralet af Gauss-krumningen over $T(p_1,p_2,p_3)$.

4^o. Lad β_1 fremkomme ved skæring af S med en plan parallel med xy-planen gennem p_2. Angiv normalkrumningen af β_1 i p_2.

5^o. Lad endelig β_2 fremkomme ved skæring mellem S og xz-planen og lad $p_4 = (\sqrt{2},0,1)$. Forbind p_4 med p_1 ved hjælp af β_2 og p_4 med p_2 ved hjælp af β_1 og lad endelig p_1 være forbundet med p_2 som før. Udregn integralet af Gauss-krumningen over den derved fremkomne trekant $T(p_1,p_2,p_4)$.

Opgave 3

Lad $\alpha\colon\ ]-a,a[\ \to S$ være en afbildning fra et interval af $\mathbb{R}$ til en regulær flade S i $\mathbb{R}^3$.

1^o. Vis, at følgende udsagn er ækvivalente:
i) α er differentiabel som afbildning ind i S.
ii) α er differentiabel som afbildning ind i $\mathbb{R}^3$.

2^o. Antag nu yderligere at α er en regulær kurve på S. Bevis da, at der findes en koordinatomegn $X(U)$ om $p = \alpha(0)$ med $U =]-\varepsilon,\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon[$, så sporet af α i $X(U)$ er billedet ved X af kurven $y = \sin(x)$ i U.