Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet januar 2005

Matematik 3 GE

Skriftlig eksamen, 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. De fire opgaver vægtes tilnærmelsesvis som angivet. Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

Opgave 1 (tæller 25 %)
Betragt den parametriserede differentiable kurve

$$\gamma(t) = (t\cos(\ln t), t\sin(\ln t), bt), \qquad t > 0,$$

hvor $b > 0$ er en konstant. Lad $p = \gamma(1) = (1, 0, b)$.

1. Vis, at γ har konstant fart, og angiv en omparametrisering med enhedsfart.
2. Bestem kurvens krumning κ i punktet p.
3. Lad $b = \sqrt{2}$. Lad keglefladen $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0,\ z > 0\}$ være orienteret således at enhedsnormalvektoren $\mathbf{N}(x, y, z)$ har retning ind mod z-aksen. Angiv vektoren $\mathbf{N}(p)$. Idet det bemærkes at kurven γ forløber i $\mathcal{S}$, skal endvidere normalkrumningen κ_n og den geodætiske krumning κ_g af γ med hensyn til $\mathcal{S}$ i punktet p bestemmes.

Opgave 2 (tæller 20%)
Lad $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz^2 = y^2 - x^2 - x\}$.

1. Vis, at $\mathcal{S}$ er en glat flade.
2. Bestem en enhedsnormalvektor $\mathbf{N}$ til tangentrummet for $\mathcal{S}$ i punktet $(0, 0, 0)$.
3. Bestem en glat funktion $f(u, v)$, således at $\mathcal{S}$ i en omegn af $(0, 0, 0)$ er graf for f over en af de tre koordinatplaner.

Opgave 3 (tæller 15 %)
Lad $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$. På en glat flade $\mathcal{S}$ er der givet et kort (σ, U) med hensyn til hvilket der gælder

$$E = \frac{1 + v^2}{u^2}, \quad F = -\frac{v}{u^4}, \quad G = \frac{1}{u^3}$$

for alle $(u, v) \in U$. Antag desuden $\mathcal{S} = \sigma(U)$, og lad $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ være fastlagt ved

$$f(\sigma(u, v)) = \sigma(u, u + v).$$

Vis, at f er en isometri.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (tæller 40%)
Lad $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$. På en orienteret glat flade $\mathcal{S}$ er der givet et (positivt orienteret) kort (σ, U) med hensyn til hvilket der gælder

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = u^2$$

for alle $(u, v) \in U$.

1. Lad

$$\alpha(t) = \sigma(t, 0)$$

for $t > 0$. Vis, at denne kurve på $\mathcal{S}$ har enhedsfart og tilfredsstiller de geodætiske ligninger for $\mathcal{S}$, hvorved den altså er en geodætisk kurve.

2. Lad endvidere kurven β være givet ved

$$\beta(s) = \sigma(1 + \cos s, \frac{\sin s}{1 + \cos s})$$

hvor $0 \le s \le \frac{\pi}{2}$. Vis for hvert s, at

$$\dot{\beta}(s) = -\sin s \sigma_u + \frac{1}{1 + \cos s} \sigma_v,$$

at i punktet $\beta(s)$ er

$$E = \frac{2}{1 + \cos s}, \quad F = \sin s, \quad G = (1 + \cos s)^2$$

samt endelig at $\|\dot{\beta}(s)\| = 1$.

3. Betragt desuden kurven

$$\gamma(t) = \sigma(1, 1 - t),$$

hvor $0 \le t \le 1$. Også denne kurve har enhedsfart (det er ikke nødvendigt at eftervise denne oplysning). Sammen med $\alpha(t)$ for $1 \le t \le 2$ udgør de to kurver β og γ en kurvelineær polygon (en trekant) på $\mathcal{S}$. Bestem de tre indre vinkler i denne polygon og deres vinkelsum.

4. Det oplyses, at fladen $\mathcal{S}$ har konstant Gauss krumning $K = 0$, at γ også er en geodætisk kurve, og at kurven β har konstant geodætisk krumning κ_g. Vis ved hjælp af disse oplysninger samt Gauss-Bonnet sætningen, at denne konstant er $\kappa_g = 1$.

5. Betragt vektorfeltet

$$\mathbf{V}(s) = \sigma_u - \frac{\sin s}{(1 + \cos s)^2} \sigma_v$$

langs $\beta(s)$. Vis, at $\|\mathbf{V}(s)\| = 1$ for alle $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Vis endvidere, at vinklen fra $\mathbf{V}(s)$ til $\dot{\beta}(s)$ er $\frac{\pi}{2} + s$.

6. Afgør, om vektorfeltet $\mathbf{V}(s)$ er parallelt langs γ.

SLUT