Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet juni 2004

Matematik 3 GE

Skriftlig eksamen, 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. De fire opgaver vægtes tilnærmelsesvis som angivet. Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

English translation on pages 3-4

Opgave 1 (tæller 20 %)
Lad $\gamma(s)$, $s \in I$, være en vilkårlig glat kurve i $\mathbb{R}^3$ med enhedsfart, med krumning $\kappa(s) \neq 0$ og med torsion $\tau(s)$. Lad $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ og $\mathbf{b}(s)$ som sædvanlig betegne tangentvektoren, hovednormalvektoren og binormalvektoren til kurven i punktet $\gamma(s)$.

Definer to nye glatte kurver $\widetilde{\gamma}$ og $\widehat{\gamma}$ ved

$$\widetilde{\gamma}(s) = \int_0^s \mathbf{b}(u)\,du, \qquad \widehat{\gamma}(s) = \int_0^s \mathbf{n}(u)\,du.$$

1. Bestem krumningen $\widetilde{\kappa}$ af $\widetilde{\gamma}$, som funktion af s.
2. Antag $\widetilde{\kappa}(s) \neq 0$. Bestem torsionen $\widetilde{\tau}(s)$ af $\widetilde{\gamma}$.
3. Vis, at krumningen af $\widehat{\gamma}$ er givet ved $\widehat{\kappa} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$.
4. Antag, at der findes en konstant c således at $\tau(s) = c\kappa(s)$ for alle $s \in I$. Vis, at billedet af $\widehat{\gamma}$ er indeholdt i en plan, og angiv en normalvektor til denne plan.

Opgave 2 (tæller 25 %)
Betragt den retlinede flade

$$\sigma(u,v) = \gamma(u) + v\delta(u), \qquad (u,v) \in U$$

hvor

$$\gamma(u) = (3u, u^2, 0), \qquad \delta(u) = (1, u, u^3).$$

Det antages, at U er en åben delmængde af $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v\}$ således at $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^3$ er et regulært kort på sit billede. Bevis for eksistens af U kræves ikke.

1. Bestem standardenhedsnormalvektoren $\mathbf{N}$ for σ, i ethvert punkt $(u,v) \in U$.
2. Bestem koefficienterne L, M og N for den anden fundamentalform, og vis at σ_v er en hovedkrumningsvektor for σ i ethvert punkt $(u,v) \in U$. Angiv den tilhørende hovedkrumning κ_1 og bestem fladens Gauss krumning K som funktion af (u,v).
3. Bestem en glat kurve $\widetilde{\gamma}$ således at σ kan omparametriseres som en del af tangentfladen for $\widetilde{\gamma}$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (tæller 10 %)
Lad $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$. På en glat flade $\mathcal{S}$ er der givet et regulært kort $\sigma: U \to \mathcal{S} = \sigma(U)$ med hensyn til hvilket koefficienterne i den første fundamental form er

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = u^2$$

for $(u,v) \in U$.

Lad $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ være fastlagt ved

$$f(\sigma(u,v)) = \sigma(au, bv),$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$ er positive konstanter.

Bestem de talpar (a,b) for hvilke f er arealbevarende.

Opgave 4 (tæller 45 %)
Betragt vindelfladen $\mathcal{S}$ med parametriseringen

$$\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

hvor a er en konstant, som antages at opfylde $0 < a < 1$. Vindelfladen antages at være orienteret med standardenhedsnormalvektoren for σ.

Advarsel: Undertiden benytter bogen denne parametrisering af vindelfladen med den omvendte betydning af u og v.

På $\mathcal{S}$ defineres tre kurver ved

$$\alpha(t) = \sigma(t, 0), \qquad \beta(t) = \sigma(b, t), \qquad \gamma(t) = \sigma(t, t),$$

hver med $0 \leq t \leq b$, hvor $b = \sqrt{1 - a^2}$. Lad D betegne den kompakte delmængde ("trekant") af $\mathcal{S}$ som afgrænses af de tre kurver.

1. Udregn længden af hver af de tre kurver. For kurven γ er det tilstrækkeligt at opstille en eksplicit integralformel for længden og det kræves ikke at integrationen udføres.
2. Lad $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bestem de tre indre vinkler i trekanten D.
3. Lad atter a være vilkårlig mellem 0 og 1. Bestem arealet af D.
4. Bestem normalkrumningen κ_n og den geodætiske krumning κ_g for kurverne α og β.
5. Udregn integralet $\iint_D K \, d\mathcal{A}_\sigma$ af Gauss krumningen over D.
6. Lad igen $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bestem det totale integrale af κ_g langs γ ved hjælp af Gauss-Bonnet sætningen.
7. Lad atter a være vilkårlig mellem 0 og 1. Lad vektorfeltet $\mathbf{V}$ langs β være givet ved

$$\mathbf{V}(t) = \cos(bt)\frac{\sigma_u}{\|\sigma_u\|} - \sin(bt)\frac{\sigma_v}{\|\sigma_v\|}.$$

Vis, at $\mathbf{V}(t)$ er parallelt langs β.

SLUT. Den engelske tekst følger på side 3

ENGLISH TRANSLATION

Written exam, 4 hours. All course material is allowed during the exam. The four problems are weighted approximately as indicated. Answers written in pencil are accepted if the writing is legible and erasings are careful. Deletion is recommended for larger changes, instead of erasing.

Exercise 1 (counts 20 %)

Let $\gamma(s)$, $s \in I$, be an arbitrary smooth curve in $\mathbb{R}^3$ with unit speed, with curvature $\kappa(s) \neq 0$ and with torsion $\tau(s)$. Let as usual $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ and $\mathbf{b}(s)$ denote the tangent vector, the principal normal vector and the binormal vector of the curve in $\gamma(s)$.

Define two new smooth curves $\widetilde{\gamma}$ og $\widehat{\gamma}$ by

$$\widetilde{\gamma}(s) = \int_0^s \mathbf{b}(u)\, du, \qquad \widehat{\gamma}(s) = \int_0^s \mathbf{n}(u)\, du.$$

1. Determine the curvature $\widetilde{\kappa}$ of $\widetilde{\gamma}$, as a function of s.

2. Assume $\widetilde{\kappa}(s) \neq 0$. Determine the torsion $\widetilde{\tau}(s)$ of $\widetilde{\gamma}$.

3. Show that the curvature of $\widehat{\gamma}$ is given by $\widehat{\kappa} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$.

4. Assume that there exists a constant c such that $\tau(s) = c\kappa(s)$ for all $s \in I$. Show that the image of $\widehat{\gamma}$ is contained in a plane, and find a normal vector of this plane.

Exercise 2 (counts 25 %)

Consider the ruled surface

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u), \qquad (u, v) \in U$$

where

$$\gamma(u) = (3u, u^2, 0), \qquad \delta(u) = (1, u, u^3).$$

It is assumed that U is an open subset of $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v\}$ such that $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^3$ is a regular surface patch on its image. Proof of the existence of U is not required.

1. Determine the standard unit normal $\mathbf{N}$ for σ, in each point $(u, v) \in U$.

2. Determine the coefficients L, M and N for the second fundamental form, and show that σ_v is a principal vector for σ in each $(u, v) \in U$. Indicate the corresponding principal curvature κ_1 and determine the Gaussian curvature K as a function of (u, v).

3. Determine a smooth curve $\widetilde{\gamma}$ such that σ can be reparametrised as part of the tangent developable for $\widetilde{\gamma}$.

The exercises continue on page 4

Exercise 3 (counts 10 %)

Let $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$. On a smooth surface $\mathcal{S}$ a regular patch $\sigma\colon U \to \mathcal{S} = \sigma(U)$ is given such that

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = u^2$$

for $(u, v) \in U$.

Let $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ be given by

$$f(\sigma(u, v)) = \sigma(au, bv),$$

where $a, b \in \mathbb{R}$ are positive constants.

Determine all pairs (a, b) for which f is equiareal.

Exercise 4 (counts 45 %)

Consider the helicoid $\mathcal{S}$ with the patch

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av), \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

where a is a constant, assumed to satisfy $0 < a < 1$. The helicoid is assumed oriented by the standard unit normal vector for σ.

Warning: Occasionally the book uses this parametrisation of the helicoid but with u and v interchanged.

On $\mathcal{S}$ three curves are defined by

$$\alpha(t) = \sigma(t, 0), \qquad \beta(t) = \sigma(b, t), \qquad \gamma(t) = \sigma(t, t),$$

each with $0 \le t \le b$, where $b = \sqrt{1 - a^2}$. Let D denote the compact subset ('triangle') in $\mathcal{S}$ bounded by these three curves.

1. Determine the length of each of the three curves. For the curve γ it suffices to set up an explicit integral formula for the length, and it is not demanded that the integration is performed.
2. Let $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Determine the three interior angles in the triangle D.
3. Let again a be arbitrary between 0 and 1. Determine the area of D.
4. Determine the normal curvature κ_n and the geodesic curvature κ_g for the curves α and β.
5. Compute the integral $\iint_D K \, d\mathcal{A}_\sigma$ of the Gaussian curvature over D.
6. Let again $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Determine the total integral of κ_g along γ by means of the Gauss-Bonnet theorem.
7. Let again a be arbitrary between 0 and 1. Let the vector field $\mathbf{V}$ along β be given by

$$\mathbf{V}(t) = \cos(bt)\frac{\sigma_u}{\|\sigma_u\|} - \sin(bt)\frac{\sigma_v}{\|\sigma_v\|}.$$

Show that $\mathbf{V}(t)$ is parallel along β.

END