Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet januar 2004

Matematik 3 GE

Skriftlig eksamen, 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. De fem opgaver vægtes tilnærmelsesvis som angivet.

Opgave 1 (tæller 25 %)
Betragt den parametriserede differentiable kurve

$$\gamma(t) = (2e^t \cos t, 2e^t \sin t, e^t), \quad t \in \mathbb{R}$$

gennem punktet $p = \gamma(0) = (2, 0, 1)$.

1. Angiv en parameterfremstilling $\alpha(s) = \gamma(t(s))$ ved buelængden ud fra p.

2. Bestem kurvens krumning κ i punktet p.

3. Bestem, i punktet p, de tre enhedsvektorer $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ (enhedstangentvektoren, hovednormalvektoren samt binormalvektoren).

4. Lad keglefladen $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \; z > 0\}$ være orienteret således at normalvektoren har retning ind mod z-aksen. Idet det bemærkes at kurven γ forløber i $\mathcal{S}$, skal normalkrumningen af γ med hensyn til denne flade i punktet p bestemmes.

Opgave 2 (tæller 10 %)
Bestem koordinatfunktionerne $(x(s), y(s))$ for den plane kurve $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, hvor $-1 < s < 1$, som har enhedsfart, hvis tangentdrejning $\varphi(s)$ (dvs. vinklen fra e_1 til $\dot{\gamma}(s)$) er givet ved $\cos \varphi(s) = s$ hvor $0 < \varphi(s) < \pi$, og som opfylder $\gamma(0) = (\frac{1}{2}, 0)$. Bestem desuden kurvens krumning (med fortegn) κ_s, som funktion af s.

En eller flere blandt følgende formler kan benyttes:

$$\frac{d}{ds}(\cos^{-1} s) = \frac{-1}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \int \cos^{-1} s \, ds = s \cos^{-1} s - \sqrt{1-s^2},$$
$$\frac{d}{ds}(\sqrt{1-s^2}) = \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \int \sqrt{1-s^2} \, ds = \tfrac{1}{2} s \sqrt{1-s^2} + \tfrac{1}{2} \sin^{-1} s.$$

Opgave 3 (tæller 20%)
Lad $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = (1 + x)(x - y^2)\}$.

1. Vis, at $\mathcal{S}$ er en glat flade.

2. Bestem en normalvektor $\mathbf{N}$ til tangentrummet for $\mathcal{S}$ i punktet $(0, 0, 0)$.

3. Bestem en glat funktion $f(u, v)$, således at $\mathcal{S}$ i en omegn af $(0, 0, 0)$ er graf for f over en af de tre koordinatplaner.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (tæller 15 %)

Lad $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$. På en glat flade $\mathcal{S}$ er der givet et kort (σ, U) med hensyn til hvilket der gælder

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = u^2$$

for alle $(u,v) \in U$. Antag $\mathcal{S} = \sigma(U)$.

1. Lad $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ være fastlagt ved

$$f(\sigma(u,v)) = \sigma(u, v + \frac{c}{u}),$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er konstant. Vis, at f er en isometri.

2. Vis, at Gauss krumningen K for fladen $\mathcal{S}$ i punktet $\sigma(u,v)$ er den samme for alle værdier af v.

Opgave 5 (tæller 30%)

Lad $\mathcal{S}$, (σ, U), samt E, F og G være som i den foregående opgave (de to opgaver er i øvrigt uafhængige).

1. Lad $A = (1, -1) \in U$ og lad $P = \sigma(A) \in \mathcal{S}$. Vis, at i dette punkt er tangentvektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \sigma_v \in T_P\mathcal{S} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_u + \sqrt{2}\sigma_v \in T_P\mathcal{S}$$

begge enhedsvektorer. Bestem vinklen mellem disse tangentvektorer.

2. Betragt kurverne

$$\gamma(s) = \sigma(a, \frac{s}{a}) \quad \text{og} \quad \mu(t) = \sigma(b\cos\frac{t}{b}, \tan\frac{t}{b}),$$

på $\mathcal{S}$, hvor $s \in \mathbb{R}$, $t \in]-b\frac{\pi}{2}, b\frac{\pi}{2}[$, og hvor $a, b > 0$ er konstanter. Vis, at begge disse kurver har enhedsfart.

3. Vis, at γ er en geodætisk kurve på $\mathcal{S}$.

4. Lad $a = 1$ og $b = \sqrt{2}$. De to kurver $s \mapsto (1, s)$ og $t \mapsto (b\cos\frac{t}{b}, \tan\frac{t}{b})$ i U skærer hinanden i $A = (1, -1)$ og $B = (1, 1)$, svarende til $s = \pm 1$ og $t = \pm b\frac{\pi}{4}$, og afgrænser derved et kompakt område $R \subset U$. Bestem de to indre vinkler i den kurvelineære polygon (tokant) $\sigma(R)$ og bestem dermed vinkelsummen.

5. Det oplyses, at fladen $\mathcal{S}$ har konstant Gauss krumning $K = 0$ og at kurven μ har konstant geodætisk krumning κ_g. Beregn denne konstant κ_g ved hjælp af disse oplysninger samt Gauss-Bonnet sætningen (stadig med $a = 1$ og $b = \sqrt{2}$. $\mathcal{S}$ orienteres i overensstemmelse med standard enhedsnormalen for kortet (σ, U)).

SLUT