Matematik 3 GE

ENGLISH TEXT Written exam, 4 hours. All course material is allowed during the exam (alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt). The 3 problems are weighted approximately as indicated.

Problem 1 (counts 20 %)

Consider the parametrized differentiable curve

$$\beta(t) = (t - \sin t, \cos t, 4\sin\frac{t}{2}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Show that the tangent vector $\beta'(t)$ has constant length, and determine a reparametrization $\alpha(s) = \beta(t(s))$ by arc length. (Recall that $\cos^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$).

2. Let $p = \beta(0) = (0, 1, 0)$. Determine, at the point p, the unit tangent vector $\mathbf{t}$, the curvature k, the normal vector $\mathbf{n}$, the binormal vector $\mathbf{b}$ and the torsion τ of the curve.

Problem 2 (counts 30 %)

Let S denote the regular surface (paraboloid of revolution) given by the graph of

$$z = a(x^2 + y^2), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

where $a > 0$ is a constant (the statement that S is a regular surface need not be verified in your solution).

1. Determine the Gauss curvature K of S in each point $(x, y, z) \in S$.

Let $k > 0$ and let

$$f(v) = k\cosh v \quad \text{and} \quad g(v) = a(v - \sinh v\cosh v)$$

for $v > 0$. Furthermore, let R denote the surface of revolution which is parametrized by

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

where

$$(u, v) \in U = (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$$

 Continuation on page 2

with u_0 arbitrary but fixed (the statement that R is a regular surface and $(\mathbf{x}, U)$ a parametrization of it need not be verified in your solution).

Let

$$\mathbf{y}(u,v) = (\cosh v \cos(ku), \cosh v \sin(ku), a\cosh^2 v)$$

for $u \in \mathbb{R}$ and $v > 0$. Then $\mathbf{y}$ is a parametrization of S, when u is restricted to any open interval of the form $(u_1 - \frac{\pi}{k}, u_1 + \frac{\pi}{k})$ (this statement need not be verified in your solution).

2. Fix $u_0 \in \mathbb{R}$ and define $\phi : \mathbf{x}(U) \subseteq R \to S$ by

$$\phi(\mathbf{x}(u,v)) = \mathbf{y}(u,v)$$

for $(u,v) \in U$. Prove that ϕ is a local isometry if and only if $k^2 = 1 + 4a^2$.

3. Assume $k^2 = 1 + 4a^2$. Determine the Gauss curvature of R in each point $\mathbf{x}(u,v)$.

Problem 3 (counts 50 %)

Let $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2) - 2xy = 0 \wedge (x,y) \neq (0,0)\}$.

1. Prove that S is a regular and orientable surface.

2. Let

$$\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u \sin v, \sin 2v)$$

for $u \neq 0$ and $v \in \mathbb{R}$, and let $U_1 = \{(u,v) \mid u > 0, -\pi < v < \pi\}$. Show that $(\mathbf{x}, U_1)$ is a parametrization of S, and compute the corresponding coefficients E, F and G of the first fundamental form.

3. Consider the regular parametrized curve $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, \frac{\pi}{4})$, $t > 0$, on S. Compute the normal vector $N(p)$ of S at $p = \alpha(t)$ for each $t > 0$. Show that α is a line of curvature of S.

4. Let $U_2 = \{(u,v) \mid u < 0, -\pi < v < \pi\}$, then $(\mathbf{x}, U_2)$ is another parametrization of S (you need not prove this statement). Do $(\mathbf{x}, U_1)$ and $(\mathbf{x}, U_2)$ determine the same or opposite orientations on $\mathbf{x}(U_1) \cap \mathbf{x}(U_2)$?

5. Consider the regular parametrized curve $\beta(t) = \mathbf{x}(1,t)$, $t \in \mathbb{R}$, on S. Let

$$\varphi(t) = -\int_0^t (1 + 4\cos^2 2\tau)^{-1/2}\, d\tau, \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(do not try to carry out the integration). Prove that the vector field

$$w(t) = \cos\varphi(t)\frac{\mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_u|} + \sin\varphi(t)\frac{\mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_v|}$$

is parallel along β.

END. The Danish text follows on page 3

DANSK TEKST Skriftlig eksamen, 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. De tre opgaver vægtes tilnærmelsesvis som angivet.

Opgave 1 (tæller 20 %)

Betragt den parametriserede differentiable kurve

$$\beta(t) = (t - \sin t, \cos t, 4\sin\frac{t}{2}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Vis, at tangent vectoren $\beta'(t)$ har konstant længde, og angiv en parameterfremstilling $\alpha(s) = \beta(t(s))$ ved buelængden. (Husk at $\cos^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$).

2. Lad $p = \beta(0) = (0, 1, 0)$. Bestem, i punktet p, enhedstangentvektoren $\mathbf{t}$, krumningen k, hovednormalvektoren $\mathbf{n}$, binormalvektoren $\mathbf{b}$ og torsionen (snoningen) τ af kurven.

Opgave 2 (tæller 30 %)

Lad S betegne den regulære flade (omdrejningsparaboloide) givet ved grafen af

$$z = a(x^2 + y^2), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

hvor $a > 0$ er en konstant (det er ikke nødvendigt i besvarelsen af denne opgave at eftervise udsagnet, at S er en regulær flade).

1. Bestem krumningsmålet (Gauss krumningen) K af S i ethvert punkt $(x, y, z) \in S$.

Lad $k > 0$ og lad

$$f(v) = k\cosh v \quad \text{og} \quad g(v) = a(v - \sinh v \cosh v)$$

for $v > 0$. Lad endvidere R betegne den omdrejningsflade som kan parametriseres ved

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

hvor

$$(u, v) \in U = (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$$

med et vilkårligt fast tal u_0 (det er ikke nødvendigt at eftervise udsagnet, at R er en regulær flade og $(\mathbf{x}, U)$ en parameterfremstilling deraf).

Lad

$$\mathbf{y}(u, v) = (\cosh v\cos(ku), \cosh v\sin(ku), a\cosh^2 v)$$

Opgavesættet fortsættes på side 4

for $u \in \mathbb{R}$ og $v > 0$. Da er $\mathbf{y}$ en parameterfremstilling af S, hvis u restringeres til et vilkårligt åbent interval af formen $(u_1 - \frac{\pi}{k}, u_1 + \frac{\pi}{k})$ (det er ikke nødvendigt at eftervise dette udsagn).

2. Lad $u_0 \in \mathbb{R}$ være fast og definer $\phi : \mathbf{x}(U) \subseteq R \to S$ ved

$$\phi(\mathbf{x}(u,v)) = \mathbf{y}(u,v)$$

for $(u,v) \in U$. Vis, at ϕ er en lokal isometri hvis og kun hvis $k^2 = 1 + 4a^2$.

3. Antag $k^2 = 1 + 4a^2$. Bestem krumningsmålet (Gauss krumningen) af R i ethvert punkt $\mathbf{x}(u,v)$.

Opgave 3 (tæller 50 %)

Lad $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2) - 2xy = 0 \wedge (x,y) \neq (0,0)\}$.

1. Vis, at S er en regulær og orienterbar flade.

2. Lad

$$\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \sin 2v)$$

for $u \neq 0$ og $v \in \mathbb{R}$, og lad $U_1 = \{(u,v) \mid u > 0, -\pi < v < \pi\}$. Gør rede for, at $(\mathbf{x}, U_1)$ er en parameterfremstilling af S, og udregn de tilhørende koefficienter E, F og G for fladens første fundamentalform.

3. Betragt den regulære parametriserede kurve $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, \frac{\pi}{4})$, $t > 0$, på S. Udregn fladenormalvektoren $N(p)$ til S i $p = \alpha(t)$, for ethvert $t > 0$. Vis, at α er en krumningskurve for S.

4. Lad $U_2 = \{(u,v) \mid u < 0, -\pi < v < \pi\}$, da er $(\mathbf{x}, U_2)$ også en parameterfremstilling af S (det er ikke nødvendigt at vise dette udsagn). Bestemmer $(\mathbf{x}, U_1)$ og $(\mathbf{x}, U_2)$ den samme eller modsatte orienteringer på $\mathbf{x}(U_1) \cap \mathbf{x}(U_2)$?

5. Betragt den regulære parametriserede kurve $\beta(t) = \mathbf{x}(1,t)$, $t \in \mathbb{R}$, på S. Lad

$$\varphi(t) = -\int_0^t (1 + 4\cos^2 2\tau)^{-1/2}\, d\tau, \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(forsøg ikke at udføre integrationen). Vis, at vektorfeltet

$$w(t) = \cos\varphi(t)\frac{\mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_u|} + \sin\varphi(t)\frac{\mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_v|}$$

er parallelt langs β.

SLUT