# Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra fredag den 13. juni kl. 9.00 til lørdag den 14. juni kl. 12.00.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

## Opgave 1

Et punkt $x$ i et topologisk rum $X$ siges som bekendt at være *isoleret,* hvis $\{x\}$ er en åben delmængde af $X$.

1° Vis at hvis et punkt $x$ ikke er isoleret i $X$, så findes et net indeholdt i $X \setminus \{x\}$, som konvergerer mod $x$.

2° Vis at hvis $F$ er en endelig delmængde af et Hausdorff rum $X$ og består af punkter som ikke er isolerede, da er $X \setminus F$ tæt i $X$.

3° Vis at hvis $X$ er et kompakt Hausdorff rum og $x$ ikke er isoleret i $X$, så er $X \setminus \{x\}$ ikke kompakt i den relative topologi.

4° Vis at der ikke findes noget tælleligt, kompakt Hausdorff rum uden isolerede punkter.

## Opgave 2

Lad $X$ være et normeret vektorrum og betragt afbildninger

$$R : X \to X$$
$$S : X^* \to X^*$$

som opfylder

$$\langle Rx, \chi^* \rangle = \langle x, S\chi^* \rangle \forall x \in X, \chi^* \in X^* .$$

1° Vis at $R$ og $S$ er lineære afbildninger.

2° Vis at $S$ er kontinuert i norm.

3° Vis ved hjælp af 2°, at også $R$ er kontinuert i norm.


Opgavesættet fortsættes på side 2

## Opgave 3

Lad $h$ være et separabelt Hilbertrum og betragt $T, U \in B(h)$ sådan at

$$U = 1 - T\,,$$

og sådan at $U$ er unitær og $T$ er kompakt.

1° Vis at $T$ er normal.

2° Vis at der findes en ortonormal basis for $h$ bestående af egenvektorer for $U$.

3° Vis at hvis egenværdierne for $U$ arrangeres til en følge $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, så gælder

$$\lambda_n \to 1\,,\ n \to \infty\,.$$

4° Antag nu videre, at $U$ er selvadjungeret. Vis at $\frac{1}{2}T$ er en ortogonal projektion.