Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra mandag den 27. januar kl. 10 til tirsdag den 28. januar kl. 15, 1997. Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.) Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

Lad $X = \{0,1,2\}$ være det topologiske Hausdorff rum bestående af tre punkter, identificeret med restklassegruppen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Sæt $Y = X^{\mathbb{N}}$ udstyret med produkttopologien.

1. Vis at Y er et kompakt Hausdorff rum.

2. Vis at hvis vi definerer

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n \ \text{ modulo } 3)$$

for ethvert par af elementer $x = (x_n)$ og $y = (y_n)$ i Y så er afbildningen $x, y \to x + y$ kontinuert fra $Y \times Y$ ind i Y (når $Y \times Y$ udstyres med produkttopologien).

3. Lad σ være en permutation af $\mathbb{N}$, dvs. en bijektiv afbildning $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Vis at funktionen $f_\sigma : Y \to Y$ givet ved $f_\sigma((x_n)) = (x_{\sigma(n)})$ er en homeomorfi.

Opgave 2

Lad $\mathfrak{Y}$ være et (lineært) underrum af et reelt vektorrum $\mathfrak{X}$. Da siges et underrum $\mathfrak{Z}$ af $\mathfrak{X}$ at være et *komplement* til $\mathfrak{Y}$ såfremt

$$\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Z} = \{0\} \ \text{ og } \ \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}.$$

1. Vis at ethvert underrum $\mathfrak{Y}$ har et komplement i $\mathfrak{X}$.

2. Vis at hvis $\mathfrak{X}$ er et Banach rum og $\mathfrak{Y}$ har endelig dimension, så kan man til enhver basis $\{y_1, \cdots, y_n\}$ for $\mathfrak{Y}$ finde et system $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ af funktionaler i $\mathfrak{X}^*$ så $\varphi_i(y_j) = \delta_{ij}$ for $1 \le i, j \le n$.

3. Vis under forudsætningerne i spørgsmål 2 at $\mathfrak{Y}$ har et lukket (= afsluttet) komplement $\mathfrak{Z}$ i $\mathfrak{X}$.

Opgave 3

Lad (x_n) være en følge af vektorer i det komplekse Hilbertrum $\mathfrak{H}$, og antag at det for ethvert x i $\mathfrak{H}$ gælder at talfølgen $(x_n \mid x)$ er konvergent.

1. Vis at (x_n) er begrænset.

2. Vis at der findes en vektor x_∞ i $\mathfrak{H}$ således at $(x_n - x_\infty \mid x) \to 0$ for ethvert x i $\mathfrak{H}$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4

Som bekendt siges to operatorer A og B på Hilbertrummet $\mathfrak{H}$ at være *unitært ækvivalente* såfremt $B = VAV^*$ for en passende unitær operator V på $\mathfrak{H}$.

Antag nu at $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ er en ortonormal basis for $\mathfrak{H}$ og lad S (det tosidede skift) betegne den unitære operator givet ved

$$Se_n = e_{n+1}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Lad endvidere U betegne en anden unitær operator på $\mathfrak{H}$.

1. Vis at hvis $|(Ux \mid x)| \geq \varepsilon \|x\|^2$ for et $\varepsilon > 0$ og for alle x i $\mathfrak{H}$ så er U og S ikke unitært ækvivalente.

2. Vis at hvis $U^n x = x$ for et helt tal $n \neq 0$ og en vektor $x \neq 0$ så er U og S ikke unitært ækvivalente.

3. Vis at hvis $Ue_n = e_{\sigma(n)}$ for alle n, hvor σ er en permutation af $\mathbb{Z}$ som virker transitivt $(\forall n, m \exists r : \sigma^r(n) = m)$ og frit $(\forall n, m : n \neq 0 \Rightarrow \sigma^n(m) \neq m)$, så er U og S unitært ækvivalente.

Opgavesættet slut