Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1995-96

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra onsdag den 24. januar kl. 10 til torsdag den 25. januar kl. 15, 1996. Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.) Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

Som nævnt i lærebogen defineres et topologisk rum X at være sammenhængende, hvis det er umuligt at dekomponere $X = A \cup B$ som forening af åbne, disjunkte, ikke tomme mængder A og B.

1. Vis at X er sammenhængende hvis og kun hvis enhver kontinuert funktion $f : X \to \{0,1\}$ er konstant.

2. Vis at hvis Y og Z (udstyret med den relative topologi) er sammenhængende delmængder af X, således at $Y \cap Z \neq \emptyset$, da er $Y \cup Z$ et sammenhængende rum (i den relative topologi).

3. Vis at hvis X og Y er topologiske rum, så er for ethvert x i X mængden

$$Y_x = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in Y\},$$

udstyret med den relative topologi som delmængde af produktrummet $X \times Y$ (med produkttopologien), homeomorf med Y.

4. Vis at hvis X og Y er sammenhængende topologiske rum, så er også $X \times Y$ sammenhængende (i produkttopologien).

Opgave 2a

Lad ℓ^∞ betegne Banach rummet af begrænsede, reelle talfølger. Vis at hvis $\mathfrak{Y}$ er et lineært underrum af et reelt normeret rum $\mathfrak{X}$, så vil der til enhver operator T i $\mathbb{B}(\mathfrak{Y}, \ell^\infty)$ findes en udvidelse $\tilde{T}$ i $\mathbb{B}(\mathfrak{X}, \ell^\infty)$ (dvs. $\tilde{T} \mid \mathfrak{Y} = T$) med $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2b

Lad T være en lineær operator mellem Banach rum $\mathfrak{X}$ og $\mathfrak{Y}$. Antag at der for ethvert φ i $\mathfrak{Y}^*$ findes en konstant $c(\varphi)$ så

$$|\langle Tx, \varphi\rangle| \leq c(\varphi)\|x\|\,, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Vis at $T \in \mathbb{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Opgave 3

Som bekendt siges to operatorer S og T i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ at være unitært ækvivalente, hvis der findes en unitær operator U på Hilbertrummet $\mathfrak{H}$, således at $US = TU$. Dette skrives $S \sim T$.

1. Vis at $S \sim T$ medfører $|S| \sim |T|$.

2. Vis at hvis I som sædvanligt betegner enhedsoperatoren ($Ix = x$ for ethvert x i $\mathfrak{H}$), så findes der ingen operator T i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ så $T \sim T + I$.

3. Vis at relationen $T \sim \frac{1}{2}T$ kun er opfyldt for én eneste operator T i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$.

4. Vis at der findes en selvadjungeret, invertibel operator T i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$, $T \neq I$, som opfylder relationen $2I - T \sim T^{-1}$. Vink: Lad $\{e_n | n \in \mathbb{Z}\}$ være en orthonormal basis for $\mathfrak{H}$ og definér U ved $Ue_n = e_{n+1}$ for ethvert n i $\mathbb{Z}$. Vælg dernæst T som en passende diagonal operator. Start f.eks. med $Te_0 = -e_0$.