Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet, sommeren 1995

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra fredag den 20. januar kl. 10 til lørdag den 21. januar kl. 15, 1995.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

Lad I_n betegne intervallet $[-n,n]$, udstyret med den sædvanlige topologi, og betragt produktrummet $X = \Pi_{n=1}^{\infty} I_n$, udstyret med produkttopologien.

1. Gør rede for at X (i hvert fald) er et normalt topologisk rum.

2. For ethvert k i $\mathbb{N}$ defineres elementet x_k i X ved $x_k(n) = 0$ hvis $n \neq k$ og $x_k(k) = (-1)^k k$. Endvidere defineres x_0 i X ved $x_0(n) = 0$ for alle n. Vis at følgen (x_n) konvergerer mod x_0 i X.

3. For vilkårlige punkter $x = \big(x(n)\big)$ og $y = \big(y(n)\big)$ i X defineres en afstand ved

$$d(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)| \wedge 1 \, .$$

Vis at denne metrik på X ikke inducerer produkttopologien.

4. Vis at den metriske topologi på X induceret af d er stærkere end produkttopologien.

Opgave 2

Lad $\mathfrak{X}$ være et Banach rum og betragt det duale rum $\mathfrak{X}^*$ udstyret med w^*-topologien.

1. Givet endelige mængder $\{x_1, \cdots, x_n\}$ og $\{y_1, \cdots, y_n\}$ i $\mathfrak{X}$ defineres en operator $T_e : \mathfrak{X}^* \to \mathfrak{X}$ ved

$$(*) \qquad T_e\varphi = \sum_{k=1}^{n} \langle y_k, \varphi \rangle x_k \, , \quad \varphi \in \mathfrak{X}^* \, .$$

Vis at T_e er w^*-norm-kontinuert (dvs. kontinuert fra $(\mathfrak{X}^*, w^*)$ til $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$).

Opgave 2 fortsættes på side 2

2. Vis at hvis $T : \mathfrak{X}^* \to \mathfrak{X}$ er en w^*-norm-kontinuert operator, så findes $x_1, \cdots, x_n$ i $\mathfrak{X}$, således at

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X}^* \qquad \|T\varphi\| \le \max_{1\le k\le n} |\langle x_k, \varphi\rangle| \,.$$

3. Vis at enhver w^*-norm-kontinuert operator fra $\mathfrak{X}^*$ til $\mathfrak{X}$ har formen $(*)$ som i spørgsmål 1.

Vink: Vis f.eks. at hvis $\mathfrak{Y} = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, med $\{x_k\}$ som i spørgsmål 2, så er $\mathfrak{Y}^\perp$ et lineært underrum af $\mathfrak{X}^*$ med $\dim(\mathfrak{X}^*/\mathfrak{Y}^\perp) \le n$. Udnyt at $\mathfrak{Y}^\perp \subset \ker T$ til at vise at $\dim\big(T(\mathfrak{X}^*)\big) < \infty$.

Opgave 3

Lad $\mathfrak{H}$ være et komplekst Hilbert rum og betragt en operator T i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ således at

$$TT^* \le T^*T \,.$$

1. Vis for ethvert tal λ i $\mathbb{C}$ at

$$\ker(T - \lambda I) \subset \ker\big((T-\lambda I)^*\big) \,.$$

2. Vis at $(T^*T)^2 \le (T^2)^*T^2$, og slut heraf at $T^2 = 0$ medfører $T = 0$.

3. Vis, for eksempel ved induktion, at $T^n = 0$ medfører $T = 0$ for ethvert n i $\mathbb{N}$.

Opgave 4

(Kun hvis kurset tages efter pensum i 1991 som 4 pkt. kursus)

Lad $\mathfrak{H}$ være et komplekst Hilbert rum og betragt operatorer S og T i $\mathfrak{H}$, hvor S er tæt defineret, medens $T \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$.

1. Vis at $\mathfrak{D}(S+T) = \mathfrak{D}(S)$ samt at $(S+T)^* = S^* + T^*$.

2. Antag at S er lukket (a closed operator) og vis at $S+T$ er lukket.

3. Antag at S er symmetrisk og at $T = T^*$ og vis at $S+T$ er symmetrisk.

4. Antag (2) og (3) og antag yderligere at $S \ge 0$ (dvs. $(Sx|x) \ge 0$ for ethvert x i $\mathfrak{D}(S)$). Vis at $S+T$ har en selv-adjungeret udvidelse og angiv en nedre begrænsning (a lower bound) for denne.

Opgavesættet slut.