Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1993–94

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra fredag 21. januar kl. 10 til lørdag 22. januar kl. 15, 1994.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

Lad $x_0, x_1, x_2 \cdots$ være en følge af punkter i et kompakt Hausdorff rum X hvor $x_n \neq x_m$ når $n \neq m$, og antag at (x_n) konvergerer mod x_0.

1. Vis at mængden $\{x_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ er lukket i X.

2. Vis at der findes en funktion f i $C(X)$ - mængden af kontinuerte, reelle funktioner på X – så $f(x_n) = (-1)^n n^{-1}$ for n i $\mathbb{N}$ og $f(x_0) = 0$.

3. Vis at der for ethvert kompakt Hausdorff rum X, som har uendeligt mange punkter, men opfylder det 2. tællelighedsaksiom (X is second countable), findes f i $C(X)$, som ikke kan skrives på formen $f = uh$, hvor u, h tilhører $C(X)$ og $|u(x)| = 1$, $h(x) \geq 0$ for ethvert x i X.

Opgave 2

Lad $\mathfrak{Y}$ og $\mathfrak{Z}$ være lukkede, lineære underrum af det reelle Banach rum $\mathfrak{X}$, således at $\mathfrak{Z}$ kan opfattes som et underrum af $\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}$, og $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Z}$ som et underrum af $\mathfrak{Y}$.

1. Vis at afbildningen $\Phi : y + \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Z} \to y + \mathfrak{Z}$ er en normformindskende, bijektiv, lineær afbildning af kvotientrummet $\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Z}$ på $(\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z})/\mathfrak{Z}$, når begge rum udstyres med kvotientnorm.

2. Vis at følgende betingelser er ækvivalente:
   (a) $(\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z})/\mathfrak{Z}$ er et Banach rum;
   (b) Φ^{-1} er begrænset;
   (c) $\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}$ er et lukket underrum af $\mathfrak{X}$.

3. Vis at betingelserne $(a) - (c)$ er opfyldte hvis $\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}$ eller $\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}$ har endelig dimension.

Opgave 3

Lad $\mathfrak{H}$ være et uendelig-dimensionalt, komplekst Hilbert rum, og lad T være en selvadjungeret operator i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$.

 Opgave 3 fortsættes på side 2

1. Vis at hvis $T = U|T|$ er polardekompositionen af T (således at $|T| = (T^2)^{1/2}$), da vil $U = U^*$ og U vil kommutere med $|T|$.
2. Bevis ulighederne

$$-I \leq U \leq I \quad \text{og} \quad -|T| \leq T \leq |T|\ .$$

3. Sæt $T_+ = \frac{1}{2}(|T| + T)$ og $T_- = \frac{1}{2}(|T| - T)$ og vis relationerne
   $T = T_+ - T_-$,
   $T_+T_- = 0$,
   $T_+ \geq 0$ og $T_- \geq 0$,
   $-T_- \leq T \leq T_+$.
4. Vis at $\|T\| = \max\{\|T_+\|\,,\, \|T_-\|\}$.