Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1992-93

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra torsdag 21. januar kl. 10 til fredag 22. januar kl. 15, 1993.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående..

Opgave 1

Lad (X, τ) være et kompakt Hausdorff rum med den egenskab at lukningen (= afslutningen) af enhver åben delmængde er åben (dvs.: $A \in \tau$ medfører $A^- \in \tau$).

1. Vis at ethvert punkt i X har en omegnsbasis bestående af mængder, som er både åbne og lukkede.

2. Vis at der for enhver åben overdækning σ af X findes en endelig åben overdækning ρ af X, bestående af parvis disjunkte mængder, således at enhver ρ-mængde er indeholdt i en σ-mængde (dvs.: for ethvert A i ρ findes et B i σ, så $A \subset B$).

3. Vis at enhver kontinuert, reel funktion på X kan tilnærmes uniformt med en kontinuert funktion, der kun antager endelig mange værdier.

Opgave 2

På den reelle akse $\mathbf{R}$ (med sædvanlig topologi) betragtes de tre vektorrum $C_b(\mathbf{R})$, $C_0(\mathbf{R})$ og $C_c(\mathbf{R})$ af kontinuerte, reelle funktioner, som henholdsvis er begrænsede, går mod 0 i det fjerne (vanish at infinity) og har kompakt støtte. Vi har således $C_c(\mathbf{R}) \subset C_0(\mathbf{R}) \subset C_b(\mathbf{R})$, jvf. 1.7.6 og 2.1.14 i lærebogen. Endvidere betragtes den uniforme norm $\|\ \|_\infty$ på $C_b(\mathbf{R})$, givet ved

$$\|f\|_\infty = \sup\{\, |f(x)| \;|x \in \mathbf{R}\,\}\,, \quad f \in C_b(\mathbf{R})\,.$$

På $C_b(\mathbf{R})$ betragtes nu seminormstopologien τ hidrørende fra familien $\{\, m_g \mid g \in C_0(\mathbf{R})\,\}$ af seminormer, hvor

$$m_g(f) = \|fg\|_\infty\,, \quad f \in C_b(\mathbf{R})\,.$$

1. Angiv en følge (e_n) i $C_c(\mathbf{R})$, så $\|g - ge_n\|_\infty \to 0$ for ethvert g i $C_0(\mathbf{R})$, og vis at $C_c(\mathbf{R})$ er tæt i $C_b(\mathbf{R})$ i τ-topologien.

2. Vis, f.eks. ved at anvende funktionerne $f_n(x) = nh(x+n)$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, hvor $h(x) = (1 - |x|) \vee 0$, at der findes en følge (f_n) i $C_c(\mathbf{R})$, således at $\|f_n g\|_\infty \to 0$ for ethvert g i $C_c(\mathbf{R})$, men der gælder ikke at $f_n \to 0$ i τ-topologien.

Opgave 2 fortsættes på side 2

3. For ethvert f i $C_b(\mathbf{R})$ defineres M_f i $\mathbf{B}(C_0(\mathbf{R}))$ ved $M_f g = fg$, $g \in C_0(\mathbf{R})$. Vis at afbildningen $f \to M_f$ er en isometri af Banachrummet $C_b(\mathbf{R})$ ind i $\mathbf{B}(C_0(\mathbf{R}))$.

4. Vis, f.eks. ved at udnytte spørgsmål 3, at hvis (f_n) er en følge i $C_b(\mathbf{R})$, således at $f_n \to 0$ i τ-topologi, så må følgen $(\|f_n\|_\infty)$ være begrænset.

Opgave 3

På det komplekse Hilbertrum $\mathfrak{H}$ betragtes operatoren T i $\mathbf{B}(\mathfrak{H})$.

1. Vis at hvis $T + T^* \geq 0$ så gælder

$$\|(T+I)x\| \geq \|x\| \quad \text{og} \quad \|(T+I)x\| \geq \|(T-I)x\|$$

for ethvert x i $\mathfrak{H}$.

2. Vis at hvis $T + T^* \geq 0$ så er $T + I$ invertibel i $\mathbf{B}(\mathfrak{H})$ og $\|(T-I)(T+I)^{-1}\| \leq 1$.

3. Antag nu omvendt at $T + I$ er invertibel i $\mathbf{B}(\mathfrak{H})$ og at $\|(T-I)(T+I)^{-1}\| \leq 1$, og slut heraf at $T + T^* \geq 0$.