Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1991-92

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra fredag den 24. januar kl. 10 til lørdag den 25. januar kl. 15, 1992.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Examination test to be completed at home from Friday, January 24th. at 10 am to Saturday, January 25 th. at 3 pm, 1992.

The test is strictly personal and no help from others is allowed. Use of textbooks, old notes, etc. is permitted.

The test should be signed (including date and place) by the student, who thereby certifies to have followed the above rules.

Problem 1

1. Show that if X is a compact Hausdorff space then for any f in $C(X)$ the set $\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}$ is open and σ-compact (i.e. a countable union of compact subsets of X).
2. Show conversely that if U is an open, σ-compact subset of X there exist f in $C(X)$, with $0 \leq f(x) \leq 1$ for all x in X, such that

$$U = \{ x \in X \mid f(x) > 0 \} .$$

Assume further that X has the property that for any pair U, V of disjoint open, σ-compact subsets of X we have $U^- \cap V^- = \emptyset$.
3. Prove in this case that for any pair f, g in $C(X)$ with $fg = 0$ (i.e. $f(x)g(x) = 0 \, \forall x \in X$), there is a function h in $C(X)$, such that $hf = 0$ and $hg = g$.

Opgave 1

1. Vis at hvis X er et kompakt Hausdorff rum og $f \in C(X)$ så vil mængden $\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}$ være åben og σ-kompakt (dvs. en tællelig forening af kompakte delmængder af X).
2. Vis omvendt at for enhver åben, σ-kompakt delmængde U af X findes et f i $C(X)$, med $0 \leq f(x) \leq 1$ for ethvert x i X, således at

$$U = \{ x \in X \mid f(x) > 0 \} .$$

Opgave 1 fortsættes på side 2

Antag nu yderligere at X har den egenskab at for ethvert par af disjunkte åbne, σ-kompakte delmængder U, V gælder at $U^- \cap V^- = \emptyset$.
3. Vis i dette tilfælde at der for ethvert par f, g i $C(X)$, således at $fg = 0$ (dvs. $f(x)g(x) = 0 \; \forall x \in X$), findes en funktion h i $C(X)$, således at $hf = 0$ og $hg = g$.

Problem 2

Let $\mathfrak{X}$ be a real Banach space with closed unit ball $\mathcal{B}$, and let C be a convex subset on the surface of $\mathcal{B}$. Thus $C \subset \mathcal{B}$, but C is disjoint from the open unit ball.
1. Show the existence of a functional φ in $\mathfrak{X}^*$ with $\|\varphi\| = 1$, such that

(*) $$C \subset \{ A \in \mathfrak{X} \mid \varphi(A) = 1 \} .$$

2. Assume that we have equality in (*) and prove that C is then a face of $\mathcal{B}$.
3. Prove that for any C as described in the beginning there is a minimal closed face of $\mathcal{B}$ containing C.

Opgave 2

Lad $\mathfrak{X}$ være et reelt Banach rum med den lukkede enhedskugle $\mathcal{B}$, og lad C være en konveks delmængde, beliggende på overfladen af $\mathcal{B}$. Altså, $C \subset \mathcal{B}$, men C er disjunkt fra den åbne enhedskugle.
1. Påvis eksistensen af en funktional φ i $\mathfrak{X}^*$ med $\|\varphi\| = 1$, således at

(*) $$C \subset \{ A \in \mathfrak{X} \mid \varphi(A) = 1 \} .$$

2. Antag at der gælder lighedstegn i (*), og vis at C da er en facet af $\mathcal{B}$.
3. Vis at der for ethvert C som beskrevet i begyndelsen af opgaven findes en mindste lukket facet af $\mathcal{B}$ som indeholder C.

Problem 3

Let $\mathfrak{H}$ be a complex Hilbert space and let $LG(\mathfrak{H})$ denote the set of operators T in $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ that are left invertible, in the sense that $ST = I$ for some S in $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$. For any A in $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ define
$$m(A) = \inf\{ \|Ax\| \mid x \in \mathfrak{H} \, , \, \|x\| = 1 \} .$$

1. Show that if $T \in LG(\mathfrak{H})$, then $m(T) > 0$.
2. Show conversely that if $T \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ with $m(T) > 0$, then $T \in LG(\mathfrak{H})$.
3. Show that if V is an isometry in $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ (i.e. $\|Vx\| = \|x\| \; \forall x \in \mathfrak{H}$) and $A \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ with $\|A\| < 1$, then $V + A \in LG(\mathfrak{H})$.

Let $T = V|T|$ be the polar decomposition of an element T in $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$.
4. Show that if $T \in LG(\mathfrak{H})$ then $|T|$ is invertible and V is an isometry.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 3

Lad $\mathfrak{H}$ være et komplekst Hilbert rum og lad $LG(\mathfrak{H})$ betegne mængden af operatorer T i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ der er venstreinvertible, i den forstand at $ST = I$ for et passende S i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$. For et ethvert A i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ defineres

$$m(A) = \inf\{\, \|Ax\| \mid x \in \mathfrak{H}\,,\ \|x\| = 1\,\}\,.$$

1. Vis at hvis $T \in LG(\mathfrak{H})$ så vil $m(T) > 0$.
2. Vis omvendt at hvis $T \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ med $m(T) > 0$ så vil $T \in LG(\mathfrak{H})$.
3. Vis at hvis V er en isometri i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ (dvs. $\|Vx\| = \|x\|\ \forall x \in \mathfrak{H}$) og $A \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ med $\|A\| < 1$, så vil $V + A \in LG(\mathfrak{H})$.

Lad $T = V|T|$ være polardekomponeringen af et element T i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$.

3. Vis at hvis $T \in LG(\mathfrak{H})$ så er $|T|$ invertibel og V er en isometri.

Problem 4

Consider the Hilbert space l^2 over $\mathbb{C}$ with the usual orthonormal basis (e_n), and let $\mathcal{D}$ denote the subspace of finite linear combinations of the basis vectors e_n , $n \in \mathbb{N}$. Define an operator T on $\mathcal{D}$ by

$$Te_n = (n+1)e_{n+1}\,,\quad n \in \mathbb{N}\,.$$

1. Find T^*.
2. Show that for every λ in $\mathbb{C}$ there is a vector x in $\mathcal{D}(T^*)$, with $x \neq 0$, such that $T^*x = \lambda x$.
3. Show that T is closable and find $\overline{T}$.

Opgave 4

Betragt Hilbertrummet l^2 over $\mathbb{C}$ med den sædvanlige orthonormalbasis (e_n), og lad $\mathcal{D}$ betegne underrummet af endelige linearkombinationer af basisvektorerne e_n , $n \in \mathbb{N}$. Definer en operator T på $\mathcal{D}$ ved

$$Te_n = (n+1)e_{n+1}\,,\quad n \in \mathbb{N}\,.$$

1. Find T^*.
2. Vis at for ethvert λ i $\mathbb{C}$ findes en vektor x i $\mathcal{D}(T^*)$, med $x \neq 0$, således at $T^*x = \lambda x$.
3. Vis at T kan lukkes og find $\overline{T}$.