Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse fredag den 25. januar 1991, kl. 9 - 12

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

Lad I betegne intervallet $[0,1]$ med sædvanlig topologi, og lad T (Tychonoff terningen) være produktrummet $I^{\mathbb{N}}$ af tælleligt mange kopier af I, udstyret med produkttopologien. For ethvert n i $\mathbb{N}$, lad x_n betegne det punkt i T, der har koordinaterne $x_n(k) = 0$ for $k \neq n$ og $x_n(n) = 1$.

(i) Vis at følgen (x_n) er konvergent i T.

(ii) Vis at der findes en kontinuert, reel funktion f på T, således at $f(x_n) = 2^{-n}$ for ethvert n.

Opgave 2

Lad $\mathcal{X}$ og $\mathcal{Y}$ være Banach rum med duale rum $\mathcal{X}^*$ og $\mathcal{Y}^*$, og lad $\mathcal{Y}_0$ være et tæt, lineært underrum af $\mathcal{Y}$. Antag at der er givet lineære afbildninger $S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^*$ og $T : \mathcal{Y}_0 \to \mathcal{X}^*$, således at

$$\langle y, Sx \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

for ethvert x i $\mathcal{X}$ og y i $\mathcal{Y}_0$.

(i) Vis at S er begrænset.

(ii) Vis at S^* er lig med T på $\mathcal{Y}_0$ (når vi identificerer $\mathcal{Y}$ med sin indlejring i $\mathcal{Y}^{**}$).

(iii) Vis at T er begrænset.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91
Matematik 3 FU

Opgave 3

For enhver begrænset operator T på Hilbertrummet $\mathcal{H}$ sættes

$$\mathrm{Re}(T) = \tfrac{1}{2}(T + T^*)\ , \quad \mathrm{Im}(T) = \tfrac{1}{2}i(T^* - T)$$

(således at vi har $T = \mathrm{Re}(T) + i\,\mathrm{Im}(T)$). Endvidere defineres den numeriske radius, $|||T|||$, af T ved

$$|||T||| = \sup\{|(Tx|x)| \ |x \in \mathcal{H}\,,\ \|x\| \leq 1\}\ .$$

(i) Vis at $\|\mathrm{Re}(T)\| \leq |||T|||$.

(ii) Vis at hvis $\gamma = |(Tx|x)| \neq 0$, så vil

$$\gamma = \big((\alpha A + \beta B)x|x\big)\ ,$$

hvis vi sætter $A = \mathrm{Re}(T)\ , \quad B = \mathrm{Im}(T)$ og
$\alpha = (Ax|x)\gamma^{-1}\ , \quad \beta = (Bx|x)\gamma^{-1}\ .$

(iii) Vis at $|||T||| = \sup_\theta \|\mathrm{Re}(\theta T)\|$, når $\theta = \alpha - i\beta$, således at $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ og $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

(iv) Vis at $|||T||| = \|\mathrm{Re}(\theta T)\|$ for et θ i $\mathbf{C}$ med $|\theta| = 1$.