Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedsekasamen, vinteren 1989-90

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse i løbet af fredag den 19. januar 1990.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt).

Opgavesættet udleveres fra kl. 9 på Matematisk Instituts kontor, E 103, og afleveres sammesteds senest kl. 16.30.

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

I dette opgavesæt betragtes følgende velkendte afbildninger af rummet $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ af følger $a = (a_1, a_2, \dots)$ af komplekse tal ind i $[0, \infty]$:
$\|a\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\|a\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n|$
og de tilsvarende Banachrum:
$l^1 = \{a \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \|a\|_1 < \infty\}$,
$l^2 = \{a \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \|a\|_2 < \infty\}$,
$l^\infty = \{a \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \|a\|_\infty < \infty\}$ og to underrum af l^∞, nemlig c bestående af de konvergente følger og c_0 bestående af de følger, der konvergerer mod 0. For $m \in \mathbf{N}$ lader vi e_m betegne den følge i $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, der har 1 på $m$te plads og 0 på alle andre.

Opgave 1

1° Vis, at $l^1 \subsetneqq l^2 \subsetneqq c_0$.

2° Vis, at l^1 ikke er en afsluttet delmængde af l^2.

3° Vis, at for hvert $N \in \mathbf{N}$ er
$\{(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^2 \mid \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leqq 1\}$ afsluttet i l^2.

4° Vis, at $\{(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqq 1\}$ er afsluttet i l^2 og kompakt i den svage topologi på l^2.

Opgave 2

Lad φ være en lineær afbildning af c_0 ind i l^2. Antag, at for hvert a i c_0 og n i $\mathbf{N}$ er $| < \varphi(a), e_n > | \leqq n\|a\|_\infty$.

1° Vis, at φ har afsluttet graf.

Opgave 2 fortsættes på side 2

2° Vis, at φ er kontinuert.

I spørgsmål 3° og 4° antages også, at for ethvert par (a, b) af følger i c_0 med $a_n b_n = 0$ for hvert n i $\mathbf{N}$ er $\varphi(a)$ vinkelret på $\varphi(b)$.

3° Vis, at $\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi(e_n)\|_2^2$.

4° Vis, for eksempel ved hjælp af formlen i spørgsmål 3°, at φ ikke er surjektiv.

Opgave 3

1° Gør rede for, at der findes en og kun én lineær operator B i $\mathcal{B}(l^2)$ med $Be_n = i^n\, n^{-1} e_n$ for n i $\mathbf{N}$;

vis, at B er normal og kompakt.

2° Gør rede for, at der findes en og kun én kompakt operator A i $\mathcal{B}(l^2)$ med $< Ax\, ,\, x > \geqq 0$ for alle x i l^2 og $A^2 = B^*B$.

Find egenværdierne og de tilhørende egenvektorer for A.

3° Vis, at for $a = (a_1, a_2, \ldots)$ i c med grænseværdi a_0 findes der en begrænset, kontinuert, kompleks funktion f på $\mathbf{C}$ med $f(n^{-1}) = a_n$ for n i $\mathbf{N}$ og $f(0) = a_0$.

Lad $\mathcal{A}$ betegne mængden af lineære operatorer på l^2 af form $f(A)$, hvor f er en begrænset, kontinuert, kompleks funktion på $\mathbf{C}$.

4° Vis, at der findes unitære operatorer U og V i $\mathcal{A}$ med $A = \frac{1}{2}(U + V)$, men at der ikke findes unitære operatorer X og Y i $\mathcal{A}$ med $B = \frac{1}{2}(X + Y)$. (Man kan udnytte, at et punkt forskelligt fra centret i det indre af en cirkel er midtpunkt af netop én korde i cirklen (en korde i en cirkel er et ret liniestykke, der forbinder to punkter af periferien)).