Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1988/89

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse i løbet af mandag den 23. januar 1989.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt).

Opgavesættet udleveres fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, E 103, og afleveres sammesteds senest kl. 16.30.

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

Lad H være et Hilbertrum over $\mathbf{C}$. En operator $S \in B(H)$ kaldes en orthogonal spejling, hvis der findes to afsluttede underrum H_1 og H_{-1} af H, sådan at H_{-1} er det orthogonale komplement til H_1 og $Sh_1 = h_1$ for $h_1 \in H_1$ og $Sh_2 = -h_2$ for $h_2 \in H_2$.

Lad nu $S \in B(H)$ være givet.

1° Vis, at følgende betingelser er ækvivalente:

a. S er en orthogonal spejling

b. S er selvadjungeret og unitær

c. S er normal og $S^2 = 1$

d. $\frac{1}{2}(1 + S)$ er en orthogonal projektion.

2° Antag, at S er en orthogonal spejling; vis, at $1 + S$ er kompakt, hvis og kun hvis fixrummet H_1 for S har endelig dimension.

Opgave 2

Lad der være givet et lokalt kompakt rum T. Lad $C_0(T)$ betegne rummet af kontinuerte begrænsede funktioner f på T med $\{t \in T \mid |f(t)| \geqq \varepsilon\}$ kompakt for hvert $\varepsilon > 0$; sæt $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$ for $f \in C_0(T)$.

1° Lad h være en kontinuert begrænset funktion på T; vis, at produktet hf tilhører $C_0(T)$ for enhver funktion f i $C_0(T)$; vis, at $f \mapsto hf$ definerer en operator $M_h \in B(C_0(T))$ med $\|M_h\| = \sup\{|h(t)| \mid t \in T\}$.

2° Lad k være en funktion på T; antag, at $kf \in C_0(T)$ for enhver funktion $f \in C_0(T)$. Vis, at k er kontinuert og begrænset.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad X være et lokalt konvekst topologisk vektorrum over $\mathbf{R}$. For $A \subseteqq X$ sættes

$$A^d = \{(f, \alpha) \in X^* \times \mathbf{R} \mid \forall a \in A : f(a) \geqq \alpha\}.$$

For $B \subseteqq X^* \times \mathbf{R}$ sættes

$${}^dB = \{x \in X \mid \forall (f, \alpha) \in B : f(x) \geqq \alpha\}.$$

Vis, at for en vilkårlig delmængde A af X er ${}^d(A^d) = \overline{co}(A)$, den mindste afsluttede konvekse delmængde af X, der indeholder A.

Opgave 4

Lad X og Y være topologiske vektorrum over $\mathbf{R}$.

1° Vis, at hvis S er en kontinuert lineær afbildning af X ind i Y, så er for enhver begrænset delmængde B af X billedet $S(B)$ en begrænset delmængde af Y.

Antag nu, at topologien på X er givet ved en metrik.

2° Vis, at hvis en delmængde A af X ikke er en omegn af 0, så findes der en følge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ i X, sådan at $x_n \notin nA$ for hvert $n \in \mathbf{N}$, og $x_n \to 0$ for $n \to \infty$.

3° Lad A være en delmængde af X. Vis, at hvis der for enhver begrænset delmængde B af X findes $k \in \mathbf{N}$, sådan at $B \subseteqq kA$, så er A en omegn af 0.

4° Vis, at en lineær afbildning S af X ind i Y er kontinuert, hvis enhver begrænset delmængde B af X har begrænset billede $S(B)$ i Y.