Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1987-88

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse i løbet af fredag den 22. januar 1988.
Opgaverne skal besvares af hver eksiminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt).
Opgavesættet udleveres fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, E 103, og afleveres sammesteds senest kl. 16.30.
Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

Lad som sædvanlig l^1 betegne Banachrummet af komplekse talfølger $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ med $\| a \| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Lad $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ være en talfølge med $c_n \in]0,\infty[$ for hvert $n \in \mathbf{N}$. Sæt $\| a \|_c = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |a_n|$ for $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, og sæt $l^1(c) = \{a \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} | \ \| a \|_c < \infty\}$.

1° Vis, at $a \mapsto \| a \|_c$ er en norm på $l^1(c)$.

2° Vis, at for hvert $m \in \mathbf{N}$ definerer $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto a_m$ en kontinuert lineær afbildning af $l^1(c)$ ind i $\mathbf{C}$.

3° Vis, at $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (a_n c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definerer en lineær isometri af $l^1(c)$ på l^1.

4o Vis, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ for hvert $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $l^1(c)$, så findes et tal $r \in]0,\infty[$ med $c_n \geqq r$ for hvert $n \in \mathbf{N}$.

Opgave 2

En delmængde A af et vektorrum over $\mathbf{R}$ kaldes en kegle, hvis

$$\forall a \in A \ \forall \lambda > 0 : \lambda a \in A.$$

Lad X betegne et lokalt konvekst topologisk vektorrum over $\mathbf{R}$. Lad M være en ikke-tom delmængde af X. Sæt $M^k = \{f \in X^* \mid \forall m \in M : f(m) \geqq 0\}$.

1° Vis, at M^k er en svag*-afsluttet konveks kegle i X^*.

2° Vis, at ${}^k(M^k) = \{x \in X \mid \forall f \in M^k : f(x) \geqq 0\}$ er den mindste afsluttede konvekse kegle i X, der indeholder M.

11. januar 1988/LK

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad X være et normeret vektorrum over $\mathbf{C}$.

1° Vis, at for $x \in X$ og $\varphi \in X^*$ definerer $\omega_{x,\varphi}(T) = \varphi(Tx)$, $T \in B(X)$, en kontinuert lineær afbildning af $B(X)$ ind i $\mathbf{C}$.

Sæt $A = \{\omega_{x,\varphi} \in B(X)^* \mid x \in X, \| x \| \leq 1, \varphi \in X^*, \| \varphi \| \leqq 1\}$.

2° Vis, at A er balanceret.

3° Lad der være givet $F \in B(X)^*$ med $\| F \| \leq 1$, og T_1 og $T_2 \in B(X)$. Vis, at der findes f i det konvekse hylster co$A$ af A, sådan at

$$|F(T_1) - f(T_1)| < 1 \quad \text{og} \quad |F(T_2) - f(T_2)| < 1.$$

Opgave 4

Lad H være et Hilbertrum over $\mathbf{C}$.

1° Lad x og y være vektorer i H med $\| y \| \leqq \| x \| = 1$ og $< y, x >= 1$. Vis, at $x = y$.

2° Vis, at enhedsoperatoren $I : x \mapsto x, x \in H$, er ekstremalpunkt i enhedskuglen i $B(H)$.

Lad N betegne mængden af kompakte positive operatorer i enhedskuglen i $B(H)$,

$$N = B_0(H) \cap \{A \in B(H) | \ \| A \| \leqq 1, \forall x \in H :< Ax, x > \geqq 0\}.$$

3° Vis, at N er en afsluttet konveks delmængde af $B(H)$.

4° Vis, at hvis $A \in N$ og $x \in H$ og $< Ax, x >= 0$, så er $Ax = 0$. (Brug f.eks., at A har en selvadjungeret kvadratrod).

5° Lad F være en operator i N. Vis, at F er et ekstremalpunkt i N, hvis og kun hvis F er projektionen på et endeligdimensionalt underrum af H.