Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1986/87

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse i løbet af fredag den 23. januar 1987.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt).

Opgavesættet udleveres kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, E 103 og afleveres sammesteds kl. 16.30.

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

<u>Opgave 1</u>. (ca. 20%)

Lad H være et Hilbertrum og T en lineær operator der opfylder at $\langle Tx,y \rangle = \langle x,Ty \rangle$ for alle $x,y \in H$.

1° Vis at T er kontinuert i den svage topologi $\sigma(H,H^{*})$ på H.

2° Vis at T er normkontinuert.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2. (ca. 40%)

Lad $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ være et Banachrum.

1° Vis at hvis $\mathfrak{Y}$ er et uendelig dimensionalt afsluttet underrum af $\mathfrak{X}$ så findes en følge (y_n) af lineært uafhængige enhedsvektorer i $\mathfrak{Y}$ for hvilke

$\| y_n - y_m \| \geq \frac{1}{2}$ for alle $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$

[Vink: Man kan konstruere følgen ved induktion, involverende kvotientrum $\mathfrak{Y}/M_n$, hvor M_n er et passende endelig dimensionalt underrum af $\mathfrak{Y}$].

Lad $T \in B(\mathfrak{X})$ være en kompakt operator.

2° Vis at hvis $\lambda \neq 0$ er en skalar, så er

$$\dim (\ker(T - \lambda)) < \infty$$

3° Vis at hvis $\mathfrak{X}$ er uendelig dimensional og T er injektiv, så er $\operatorname{ran} T \neq \mathfrak{X}$.

Vi siger at λ er en egenværdi for T hvis

$$\ker (T - \lambda) \neq \{0\}.$$

4° Gør rede for at hvis $\lambda \neq 0$ ikke er en egenværdi for T så vil mindst en af nedenstående påstande gælde:

a) $T - \lambda$ har en begrænset invers.

b) λ er en egenværdi for T^*.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedsekamen, januar 1987

Matematik 3 FU

Opgave 3. (ca. 40%)

Lad $\mathfrak{X}$ være et reelt vektorrum og $C \subseteq \mathfrak{X}$ konveks og absorberende. Definer for ethvert $x \in \mathfrak{X}$

$$q(x) := \inf \{t \in \mathbb{R}_+ \mid x \in t\,C\}$$

1° Vis at q er en sublineær funktional og at

$$\{x \mid q(x) < 1\} \subseteq C \subseteq \{x \mid q(x) \leq 1\}$$

Lad $A \subseteq \mathfrak{X}$ være konveks og absorberende, lad $B \subseteq \mathfrak{X}$ være konveks. Antag at

$$A \cap B = \emptyset$$

Lad $b_o \in B$ og definer

$$C := \{a - b + b_o \mid a \in A,\ b \in B\}$$

2° Vis at C er konveks og absorberende, samt at $b_o \notin C$.

På $\mathbb{R}\,b_o$ defineres $f(t\,b_o) := t$ for alle $t \in \mathbb{R}$.
Lad q være den ovenfor definerede til C svarende sublineære funktional.

3° Vis at $f(x) \leq q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}\,b_o$; gør rede for at der findes en lineær funktional F, der udvider f til hele $\mathfrak{X}$, for hvilken

$$F(x) \leq q(x) \quad \text{for alle} \quad x \in \mathfrak{X}.$$

4° Vis at $F(a) \leq F(b)$ for alle $a \in A$, $b \in B$ og slut heraf at $F(A) \cap F(B)$ indeholder højst ét punkt.