Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1985/86

Matematik 3 FU

Opgavesæt til besvarelse i løbet af fredag den 24. januar 1986.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt).

Opgavesættet udleveres kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, E 103 og afleveres sammesteds kl. 16.30.

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1.

Denne opgave går ud på at udlede "Open mapping theorem" (Conway III.12.1) ud fra "Closed graph theorem" (Conway III.12.6), dvs. opgavebesvarelsen må forudsætte at Conway III.12.6 gælder, men ikke at Conway III.12.1 er kendt.

Lad $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ være Banach rum og $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ en kontinuert lineær afbildning af $\mathfrak{X}$ på $\mathfrak{Y}$.

1° Lad $\ker T := \{x \in \mathfrak{X} \mid Tx = 0\}$ og gør rede for at T inducerer en kontinuert lineær surjektiv afbildning

$$\hat{T} : \mathfrak{X}/\ker T \to \mathfrak{Y} .$$

(Opgaven fortsættes)

2° Gør rede for at $\hat{T}^{-1}$ er en lineær afbildning med afsluttet graf.

3° Gør på grundlag af ovenstående rede for at T er en åben afbildning.

Opgave 2.

Lad $\mathfrak{X}$ være et Banach rum med norm $\| \ \|$ og lad $B := \{x \in \mathfrak{X} \mid \|x\| \leq 1\}$ betegne den afsluttede enhedskugle. Antag B er kompakt i norm-topologien.

1° Lad $U := \{x \in \mathfrak{X} \mid \|x\| < \frac{1}{2}\}$, og gør rede for at der findes $x_1, \dots, x_n \in B$ så

$$B \subseteq (x_1 + U) \cup (x_2 + U) \cup \dots \cup (x_n + U) .$$

Lad $Y = \operatorname{span}(x_1, \dots, x_n)$.

2° Vis at $B \subseteq Y + \frac{1}{2^n} B$ for $n = 1, 2, \dots$

3° Gør rede for at for normafslutningen Y^- gælder

$$Y^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + \frac{1}{2^n} B) .$$

4° Vis at $\mathfrak{X}$ er endeligdimensional.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1986

Matematik 3 FU

Opgave 3.

Lad X være et kompakt Hausdorff rum og $C(X)$ rummet af kontinuerte funktioner fra X ind i $\mathbb{C}$. Udstyr $C(X)$ med supnormen.

Lad $\mathfrak{X}$ betegne et Banach rum og lad $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, C(X))$.

1° Vis at der findes en afbildning

$$\tau : X \to \mathfrak{X}^*$$

så $\quad (Tx)(s) = \tau(s)x, \qquad \forall s \in X, \ x \in \mathfrak{X}.$

2° Vis at τ er kontinuert når $\mathfrak{X}^*$ udstyres med w*-topologien.

3° Vis at $\|T\| = \sup_{s \in X} \|\tau(s)\|$.

4° Vis at hvis τ er kontinuert i norm-topologien på $\mathfrak{X}^*$, så er T en kompakt operator.

5° Lad $\varphi \in C([0,1] \times [0,1])$ og definer

$$T : C([0,1]) \to C([0,1])$$

ved

$$Tf(y) := \int_0^1 \varphi(x,y) f(x)\,dx .$$

Gør rede for at T er kompakt.