Københavns Universitet, Matematisk Institut.
Naturvidenskabelig Embedseksamen, Matematik 3NA, Numerisk Analyse.
Januar 1994. Alle normale hjælpemidler er tilladt. Alle delspørgsmål vægtes ens (10%).
En karakter gives først efter at alle programmeringsprojekter er afleveret og godkendt.

Opgave 1: Matrixnormer.

Lad A være en $n \times n$ matrix.
I denne opgave arbejdes med to matrixnormer $\|\cdot\|$ og $|||\cdot|||$.
Definér den første norm ved $\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$.

a) Vis at dette er en matrixnorm (d.v.s. en norm på det lineære rum af $n \times n$ matricer).

b) Vis at den ikke er tilegnet nogen vektornorm for $n > 1$.

Lad λ_i være egenværdierne for matricen $A^T A$ og definér $|||A|||^2 = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$.
(λ er en egenværdi for en $n \times n$ matrix B hvis og kun hvis $Bx - \lambda x = 0$ har en n vektor $x \neq 0$ som løsning).

c) Vis at hvis A er symmetrisk og har egenværdier μ_i da gælder $|||A||| = \max_{1 \le n} |\mu_i|$.
(Du kan antage at der er n forskellige egenværdier både for $A^T A$ og for A).

Opgave 2: Konjugeret gradient metoden.

Betragt følgende system af lineære ligninger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Vis at 2×2 matricen ovenfor er symmetrisk og positiv definit.

b) Løs problemet med konjugeret gradient metoden (inkludér alle detaljer). Start fra $(x, y) = (0, 0)$, Udfør højst 3 iterationer, og lad stopkriteriet være at den euklidiske norm af residuet bliver mindre end 10^{-4}.

Opgave 3: Polynomial interpolation.

a) Forklar hvorfor det er muligt at interpolere vilkårlige funktionsværdier i punkterne $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ med et kvadratisk polynomium ($p \in \Pi_2(\mathcal{R}^2)$). Find det interpolerende polynomium for datasættene $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(2, 0, 4)$, $(0, 2, 5)$.

b) Er det muligt at interpolere vilkårlige funktionsværdier i punkterne $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ med et kvadratisk polynomium ($p \in \Pi_2(\mathcal{R}^2)$)? Hvis ja, giv da et eksempel på en fremgangsmåde for dette. Find et interpolationsrum af mindst mulig dimension som også interpolerer vilkårlige funktionsværdier i disse punkter.

Opgave 4: Numerisk differentiation og integration.

a) Find Trunkeringsfejlen for den følgende approximationsformel for den tredje afledede af en funktion f:

$$f'''(x) \simeq \frac{1}{2h^3}[f(x + 2h) - 2f(x + h) + 2f(x - h) - f(x - 2h)]$$

b) Vis at følgende er den to punkts Gauss quadratur formel:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-1/\sqrt(3)) + f(1/\sqrt(3)).$$

c) Beregn med den to punkts Gauss quadratur formel og med trapez formlen integralet

$$\int_{-2}^{2} x^4 dx$$

og sammenlign resultaterne med den eksakte værdi.

(Opgavesættet slut).

Copenhagen University, Institute of mathematics.
Naturvidenskabelig Embedseksamen, Matematik 3NA, Numerisk Analyse.
January 1994. Open book exam. All 10 questions are weighted evenly (10%).
A grade is given only after all programming assignments have been turned in and accepted.

Problem 1: Matrixnorms.

Let A be an $n \times n$ matrix.
In this problem two matrixnorms $\|\cdot\|$ and $|||\cdot|||$ are used.
Define the first norm by $\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$.

a) Show that this is a matrix norm (that is, a norm on the linear space of $n \times n$ matrices).

b) Show that it is not subordinate to any vector norm for $n > 1$.

Let λ_i be the eigenvalues for the matrix $A^T A$ and define $|||A|||^2 = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$.
(λ is an eigenvalue for an $n \times n$ matrix B if and only if $Bx - \lambda x = 0$ has a nontrivial n vector x as solution).

c) Show that if A is symmetric and has eigenvalues μ_i then $|||A||| = \max_{1 \le n} |\mu_i|$.
(You may assume that there are n different eigenvalues for $A^T A$ as well as for A).

Problem 2: The Conjugate gradient method.

Consider the system of linear equations

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Show that the 2×2 matrix above is symmetric and positive definite.

b) Solve the problem with the conjugate gradient method (include all details) starting from $(x, y) = (0, 0)$, taking at most 3 steps, and letting the stop criterion be that the euclidian norm of the residual falls below 10^{-4}.

Problem 3: Polynomial interpolation.

a) Explain why it is possible to interpolate arbitrary data with a quadratic polynomial ($p \in \Pi_2(\mathcal{R}^2)$) on the points $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Find the interpolating polynomial corresponding to the data points $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,2)$, $(1,1,3)$, $(2,0,4)$, $(0,2,5)$.

b) Is it possible to interpolate arbitrary data with a quadratic polynomial ($p \in \Pi_2(\mathcal{R}^2)$) on the points $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$? If yes, then give an example of a procedure. Also find an interpolation space of lowest possible dimension that interpolates arbitrary data on the same set of points.

Problem 4: Numerical differentiation and integration.

a) Find the error term for the following approximation formula for the third derivative of a function f:

$$f'''(x) \simeq \frac{1}{2h^3}[f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)]$$

b) Verify that the following is the two point Gauss quadrature formula:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-1/\sqrt(3)) + f(1/\sqrt(3)).$$

c) Compute with the two point Gauss quadrature formula and with the trapezoidal rule the integral

$$\int_{-2}^{2} x^4 dx$$

and compare the results to the exact value.

(Exam finished).