Københavns Universitet, Matematisk Institut.
Naturvidenskabelig Embedseksamen, Matematik 3NA, Numerisk Analyse.
Januar 1997. Alle normale hjælpemidler er tilladt. Alle delspørgsmål vægtes ens (10%).
En karakter gives først efter at alle programmeringsprojekter er afleveret og godkendt.

Opgave 1: Differensmetoder for sædvanlige differentialligninger.

a) Vis at

$$\frac{1}{2h}\{u(x+h)-u(x-h)\} \text{ og } \frac{1}{h^2}\{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)\}$$

er anden ordens differens-tilnærmelser til henholdsvis u' og u'' for $u : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{R})$. Det skal bevises at tilnærmelserne er af netop anden ordens præcision.

b) Brug differens-tilnærmelserne fra (a) til at konstruere differens-metoden med konstant step-længde h for følgende rand-værdi-problem:

$$\begin{aligned} &u''(x)+x^2u'(x)+u(x)=cos(x), \text{ for } 0 \le x \le 1 \\ &u(0)=0, \qquad u(1)=1. \end{aligned}$$

c) Opskriv matrix-lignings-systemet svarende til (b) for tilfældet $h = 1/4$.

Opgave 2: Polynomial interpolation.

a) Beregn funktions-udtryk for den kontinuerte, stykkevis polynomiale funktion $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, der er lineær på $[0,1]$, kvadratisk på $[1,3]$, og antager værdierne

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad f(2)=2, \quad f(3)=0.$$

b) Beregn funktions-udtryk for den kontinuert differentiable ($\mathcal{C}^1$), stykkevis polynomiale funktion $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, der antager de samme værdier i punkterne 0, 1, 2 og 3 som f fra (a), og som er et polynomium af graden højst 2 i både $[0,1]$ og $[1,3]$.

Opgave 3: Newton's metode.

Antag at funktionen $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ er to gange kontinuert differentiabel ($\mathcal{C}^2$), konveks, og at $f'(x) < 0$ for alle x. Antag også at $f(x) = 0$ har en løsning.
Vis entydighed af en sådan løsning, og vis at Newton's metode konvergerer mod løsningen fra et vilkårligt startgæt x_0 (global konvergens).

Opgave 4: Jacobi's metode.

a) Anvend Jacobi's metode på det lineære ligningssystem $Ax = b$ hvor

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Brug start-approximationen $x^0 = (1,1,1)^T$, og udfør to iterationer.

b) Bevis konvergens af Jacobi's metode for problemet fra (a). Følgende resultater kan benyttes uden bevis: En reel, symmetrisk $n \times n$ matrix H har n lineært uafhængige egenvektorer, og de absolutte værdier af de tilhørende egenværdier er højst lig med $\|H\|_\infty$.

Opgave 5: Gauss kvadratur.

a) Vis at $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ er en to-punkts Gauss kvadratur formel for $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

b) Find den to-punkts Gauss kvadratur formel for integralet $\int_{0}^{1} f(x)dx$.

(Opgavesættet er slut).