Matematik 3NA, numerisk analyse.
1997 (nyt) pensum.

Studienævnet for Matematik, Københavns Universitet. Sommer 1998.
Sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Programmerbare lommeregnere og computere er ikke tilladt.
Alle delspørgsmål vægtes ens (10%).
En karakter gives først efter at alle programmeringsprojekter er afleveret og godkendt.

Anvendte sætninger skal refereres ved navn eller evt. ved nummer i Brenner/Scott. De kan anvendes uden bevis, men alle forudsætninger skal vises.

Lad $\Omega =]0,1[^2$. Vi skal betragte følgende randværdiproblem:

(1) Find $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) : -\Delta u + xyu = f$ i Ω og
$u|_{\partial\Omega} = 0$, hvor $f(x,y) = -(6x-2)(y^2-y) - 2(x^3-x^2) + (x^4-x^3)(y^3-y^2)$.

Bemærk at (1) har løsningen $u(x,y) = (x^3-x^2)(y^2-y)$.

Betragt også følgende variationsproblem:

(2) Find $u \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega) : a(u,v) = F(v)\ \forall v \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega)$
hvor $a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + xyuv)dxdy,\ F(v) = \int_\Omega fvdxdy.$

Bemærk at $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega) = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$.

1: Vis at $a : (\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega))^2 \to \mathcal{R}$ er begrænset.

2: Vis at $a : (\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega))^2 \to \mathcal{R}$ er elliptisk (koerciv).

3: Vis at (2) har en entydig løsning (eksistens og entydighed).

4: Vis at hvis u løser (1), så løser u også (2).

5: Vis at hvis $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ løser (2), så løser u også (1).

Betragt følgende diskretisering af (2):

(3) Find $u_n^p \in \mathcal{V}_n^p(\Omega) : a(u_n^p, v) = F(v)\ \forall v \in \mathcal{V}_n^p(\Omega)$ hvor
$\mathcal{V}_n^p(\Omega) = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = 0,\ v|_{\Delta_k} \in \mathcal{P}_p(\Delta_k)\}$ og $\{\Delta_k\}_{k=1}^{2n^2}$
er en disjunkt inddeling af Ω i $2n^2$ retvinklede trekanter. Først inddeles Ω i n^2 ækvivalente kvadrater. Hvert kvadrat opdeles derefter langs diagonalen fra øverste venstre til nederste højre hjørne i 2 trekanter.

Bemærk at $\mathcal{P}_p$ er rummet af p'te grads polynomier.

6: Vis at (3) har en entydig løsning for alle positive heltal p og n.

7: Hvor stor skal p være, for at løsningen til (3) er identisk med løsningen til (2)?

8: Vis for $p = 1$, at løsningen u_n^1 til (3) konvergerer mod løsningen u til (2) i energinormen, når $n \to \infty$.

9: Opskriv de generelle betingelser, der bestemmer Lagrange basisfunktionerne for den kvadratiske Lagrange trekant Δ med hjørner i (0,0), (0,1) og (1,0), og knudepunkter i hjørnerne samt i midtpunkterne af siderne.
Udregn funktionsudtrykket for basisfunktionen hørende til knudepunktet (0,0).

10: Konstruer den 1 punkts Gauss kvadratur $w_1 g(x_1, y_1)$ (eksakt for alle $g \in \mathcal{P}_1(\Delta)$) for $\int_\Delta g(x,y)dxdy$ hvor Δ er trekanten fra opg.9.

(Opgavesættet er slut).