Københavns Universitet, Matematisk Institut.
Naturvidenskabelig Embedseksamen, Matematik 3NA, Numerisk Analyse.
Januar 1995. Alle normale hjælpemidler er tilladt. Alle delspørgsmål vægtes ens (10%).
En karakter gives først efter at alle programmeringsprojekter er afleveret og godkendt.

Opgave 1: Newton's metode, homotopi-metoder, og interpolation.

a) Start fra $x_0 = 0$ og udfør en Newton iteration på ligningen $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 12 = 0$ (dvs. find x_1).

Det oplyses at Newton's metode vil konvergere mod den entydigt bestemte løsning $x = 4$ til ovenstående problem; men først efter mere end 30 iterationer opnåes en fejl der er mindre end 1.
I stedet søges problemet løst med en homotopi-metode baseret på en homotopi

$$h(t, x) = (1 - t)g(x) + tf(x),$$

en inddeling

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1,$$

samt Newton's metode.

b) Beskriv på algoritmeform den ovenfor beskrevne homotopi-metode.

c) Lad $g(x) = 99x - 312$, og $m = 1$. Løs $f(x) = 0$ med homotopi-metoden beskrevet ovenfor, til 2 decimalers nøjagtighed. Brug dog højst 2 Newton iterationer pr. t værdi.

d) Eftervis at $g(x)$ er det første grads polynomium som interpolerer $f(x)$ i $x = -10$ og $x = 10$, og bestem en mindste øvre grænse for fejlen $|g(x) - f(x)|$ i intervallet $[-10, 10]$ ved brug af en sætning baseret på Rolle's sætning.

Opgave 2: Lineære ligningssystemer.

a) Formuler Jacobi's iterative metode til løsning af det lineære ligningssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og udfør en iteration startende fra

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(dvs. find $[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}]^t$).

b) Vis at metoden konvergerer for ovenstående problem.

c) Vis at der findes en positiv konstant c så $\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq c\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$ for ovenstående problem.
Bestem værdien af c.
Brug resultatet til kort at formulere et stopkriterium for metoden.

Opgave 3: Polynomial interpolation.

a) Find et polynomium p af lavest mulig grad som opfylder $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p'(0) = 0$.
Find også et polynomium q af lavest mulig grad som opfylder $q(0) = 0$, $q(1) = 1$,

$q'(1/2) = 4$.
Forklar i få ord forskellen på de to tilfælde.

Opgave 4: Sædvanlige differentialligninger.

a) Vis at følgende lineære multistep metode til løsning af $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ er mindst af orden 3:

$$x_n = x_{n-3} + \frac{3}{8}h\left(f_n + 3f_{n-1} + 3f_{n-2} + f_{n-3}\right),$$

hvor $t_j = t_0 + jh$, $x_j = x(t_j)$, og $f_j = f(t_j, x_j)$.

b) Vis at ovenstående metode er konvergent.

(Opgavesættet er slut).