Københavns Universitet, Matematisk Institut.
Naturvidenskabelig Embedseksamen, Matematik 3NA, Numerisk Analyse.
Juni 1997. Alle normale hjælpemidler er tilladt. Alle delspørgsmål vægtes ens (10%).
En karakter gives først efter at alle programmeringsprojekter er afleveret og godkendt.

Opgave 1: Differensmetoder for sædvanlige differentialligninger.

a) Heuns metode til løsning af differentialligningen $y' = f(x, y)$ for $a \leq x \leq b$ kan skrives på formen

$$y_{k+1} = y_k + h\phi_h(x_k, y_k), \text{ hvor } \phi_h(x, y) = \frac{1}{2}[f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))].$$

Vis at Heuns metode giver en lokal trunkeringsfejl $L(h) = \mathcal{O}(h^2)$ hvor

$$L(h) = \max_{a \leq x \leq b-h} |L(x, h)|, \; L(x, h) = \frac{1}{h}[y(x + h) - y(x)] - \phi_h(x, y(x)).$$

Her er y løsningen til ovenstående differentialligning.

b) Løs $y'(x) = x + y(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 0$ med Heuns metode med $h = 1/2$. (Du behøver ikke at forkorte brøker).

Opgave 2: Polynomial interpolation.

a) Beregn funktions-udtryk for den kontinuerte, stykkevis polynomiale funktion $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, der er konstant på $[0, h]$, lineær på $[h, 3h]$, og antager værdierne $f(0) = 5, \quad f(2h) = 6$.

b) Benyt f fra (a) som approximation til en funktion $g \in \mathcal{C}^2([0, 3h])$ der antager værdierne $g(0) = 5$, og $g(2h) = 6$. Find en øvre grænse for approximationsfejlen $E = \max_{0 \leq x \leq 3h} |f(x) - g(x)|$.

c) Find konstanten a der minimerer $\max_{1 \leq x \leq 1+h} |x^2 - a|$.

Opgave 3: Newton's metode.

Lad $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ være to gange kontinuert differentiabel, og antag at f har et nulpunkt x^*. Antag også at der findes positive konstanter ϵ og δ så $|f'(x)| \geq \epsilon \; \forall x \in \mathcal{R}$, og $|f''(x)| \leq \delta \; \forall x \in \mathcal{R}$. Vis at Newton's metode er kvadratisk konvergent dvs. at der findes et $c > 0$ så $|e_{n+1}| \leq ce_n^2$, hvor $e_n = x_n - x^*$ og $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. (Hjælp: Taylor's sætning giver $0 = f(x^*) = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{1}{2}e_n^2 f''(\xi_n)$ for et ξ_n mellem x_n og x^*. Benyt dette i et udtryk for e_{n+1} udledt fra Newton metodens iterationsformel).

Opgave 4: Gauss-Seidel's metode.

a) Anvend Gauss-Seidel's metode på det lineære ligningssystem $Ax = b$ hvor

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Brug start-approximationen $x^0 = (0, 1, 0)^T$, og udfør en iteration.

b) Bevis konvergens af Gauss-Seidel's metode $x^{k+1} = Hx^k + d$ for problemet fra (a). Alle delresultater skal bevises, men det oplyses at H for det givne problem har 3 lineært uafhængige egenvektorer.

Opgave 5: Numerisk kvadratur.

a) Udled fejlformlen

$$E_S = -\frac{h^5}{2880} f^{(4)}(a + \frac{h}{2}) + \mathcal{O}(h^6)$$

for Simpson's formel for $\int_a^{a+h} f(x)dx$.

b) Brug fejlformlen fra (a) til at udlede en fejlformel

$$|E_{sS}| \leq \frac{h^4}{2880}(b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| + \mathcal{O}(h^5)$$

for den sammensatte Simpson's formel for $\int_a^b f(x)dx$, hvor intervallet $[a, b]$ opdeles i n lige store dele, hver med længden $h = \frac{b-a}{n}$.

(Opgavesættet er slut).