Matematik 3NA, numerisk analyse. Finite element metoden.

Studienævnet for Matematik, Københavns Universitet, den 22. Juni 1999.
Sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Programmerbare lommeregnere og computere er ikke tilladt.
Alle delspørgsmål vægtes ens (10%).
En karakter gives først efter at alle programmeringsprojekter er afleveret og godkendt.

Anvendte sætninger skal refereres ved navn eller evt. ved nummer i Brenner/Scott. De kan anvendes uden bevis, men alle forudsætninger skal vises.

1. del. Sobolev rum:
Lad Ω være et 3 dimensionalt domæne med Lipschitz rand.

1: For hvilke heltallige, positive værdier af k gælder $\mathcal{L}^\infty(\Omega) \supseteq \mathcal{W}_1^k(\Omega)$?

2: For hvilke heltallige, positive værdier af k gælder $\mathcal{L}^1(\partial\Omega) \supseteq \mathcal{W}_1^k(\Omega)$?

2. del. Variations formulering af elliptiske randværdiproblemer:
Lad $\Omega =]0,1[^3$, og $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Vi skal betragte følgende randværdiproblem:

$$\text{(1)} \qquad \text{Find } u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) : -\Delta u + u = f \text{ i } \Omega \text{ og } u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Betragt også følgende variationsproblem:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &\text{Find } u \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega) : a(u,v) = F(v)\ \forall v \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega), \\ &\text{hvor } a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)dxdydz,\ F(v) = \int_\Omega fvdxdydz. \end{aligned}$$

Bemærk at $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega) = \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega) = \{v \in \mathcal{W}_2^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Det oplyses endvidere, at begge normerne defineret i opgave 3 nedenfor er normer for $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega)$.

3: Vis at normerne defineret ved

$$\text{(3)} \qquad |u|_1 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dxdydz, \qquad \|u\|_1 = \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla u + u^2\right) dxdydz$$

er ækvivalente på $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega)$ dvs. $\exists c, C \in \mathcal{R}_+\ (0 < c, C < \infty) :\ c|u|_1 \le \|u\|_1 \le C|u|_1\ \forall u \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega)$.
Hint: Brug Poincaré's ulighed. (Husk at eftervise forudsætningerne).

4: Vis at $a : (\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega))^2 \to \mathcal{R}$ er begrænset.

5: Vis at $a : (\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1(\Omega))^2 \to \mathcal{R}$ er elliptisk (koerciv).

6: Vis at (2) har en entydig løsning (eksistens og entydighed).

7: Vis at hvis u løser (1), så løser u også (2).

8: Vis at hvis $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ løser (2), så løser u også (1).

Betragt følgende diskretisering af (2):

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} &\text{Find } u_n^p \in \mathcal{V}_n^p(\Omega) : a(u_n^p, v) = F(v)\ \forall v \in \mathcal{V}_n^p(\Omega) \text{ hvor} \\ &\mathcal{V}_n^p(\Omega) = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = 0,\ v|_{\Delta_k} \in \mathcal{Q}_p(\Delta_k)\} \text{ og } \{\Delta_k\}_{k=1}^{n^3} \\ &\text{er en disjunkt inddeling af } \Omega \text{ i } n^3 \text{ ækvivalente kvadrater.} \end{aligned}$$

Bemærk at $\mathcal{Q}_p$ er rummet af tri-p'te grads polynomier.

9: Vis at (4) har en entydig løsning for alle positive heltal p og n.

10: Vis for $p = 1$, at løsningen u_n^1 til (4) konvergerer mod løsningen u til (2), når $n \to \infty$, forudsat at $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$.

(Opgavesættet er slut).