Københavns Universitet, Matematisk Institut.
Naturvidenskabelig Embedseksamen, Matematik 3NA, Numerisk Analyse.
Januar 1996. Alle normale hjælpemidler er tilladt. Alle delspørgsmål vægtes ens (10%).
En karakter gives først efter at alle programmeringsprojekter er afleveret og godkendt.

Opgave 1: Iterative metoder for lineære ligningssystemer.

Betragt den iterative metode

$$(*) \qquad x^{(k)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k-1)} + Q^{-1}b$$

til løsning af det lineære ligningssystem

$$Ax = b.$$

($x, b \in \mathbf{R}^n$, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$).

a) Opskriv en løsningsalgoritme til erstatning af $(*)$ som ikke kræver beregning af Q^{-1}.

b) Bevis at $(*)$ er konvergent hvis $\|I - Q^{-1}A\| < 1$ for en vilkårlig matrixnorm $\|\cdot\|$ tilordnet en vektornorm.

c) Givet $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6/10 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6/10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, og $Q^{-1} = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -6 \\ 6 & -8 & 8 \\ -6 & 8 & m \end{pmatrix}$.
Find k, m, $\|I - Q^{-1}A\|_1$, samt $\|I - Q^{-1}A\|_\infty$. Inkluder tilstrækkeligt med mellemregninger til at det er klart hvordan resultaterne er fundet. Er metoden $(*)$ konvergent i dette tilfælde?

Opgave 2: Interpolation i to dimensioner.

Lad de fire punkter $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$, og $D = (0,1)$ være givet.

a) Angiv et bi-lineært polynomium $p \in \Pi_1(\mathbf{R}^1) \otimes \Pi_1(\mathbf{R}^1)$ som antager værdien 4 i A og værdien 0 i B, C, og D.
Angiv også et lineært polynomium $q \in \Pi_1(\mathbf{R}^2)$ som antager værdien 4 i A og værdien 0 i B og C.

b) Bevis (evt. ved reference til en sætning fra bogen) at det er muligt at interpolere vilkårlige funktionsværdier i punkterne $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ og $(0,2)$ med et kvadratisk polynomium $r \in \Pi_2(\mathbf{R}^2)$.
Find også det interpolerende polynomium r når det kræves at $r(0,0) = 0$, $r(1,0) = 0$, $r(0,1) = 1$, $r(1,1) = 1$ og $r(0,2) = 0$, og $r(2,0) = 4$.

Opgave 3: Numerisk integration.

a) Lad en Gauss kvadratur formel være givet ved

$$\int_{-2}^{2} x^2 f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{1} A_i f(x_i).$$

Find x_0, x_1, A_0, og A_1. (Vink: Udnyt symmetrien).

b) Udregn ved brug af Gauss kvadratur formlen fra spørgsmål (a), en tilnærmelse til $\int_{-1}^{1} x^6 dx$.

c) Fejlen i ovenstående Gauss kvadratur kan angives få formen $cf^{(d)}(\xi)$ for et eller andet $\xi \in (-2, 2)$. Angiv udtryk for c og d og find talværdier for disse konstanter.

Opgave 4: Sædvanlige differentialligninger.

a) Vis at følgende Adams-Bashford metode til løsning af $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ er netop af orden 2:

$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}),$$

hvor $t_j = t_0 + jh$, $x_j = x(t_j)$, og $f_j = f(t_j, x_j)$.

b) Undersøg om ovenstående metode er konvergent.

(Opgavesættet er slut).