Matematik 3NA, numerisk analyse. Finite element metoden.

Studienævnet for Matematik, Københavns Universitet, den 4. Januar 1999.
Sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Programmerbare lommeregnere og computere er ikke tilladt.
Alle delspørgsmål vægtes ens (10%).
En karakter gives først efter at alle programmeringsprojekter er afleveret og godkendt.

Anvendte sætninger skal refereres ved navn eller evt. ved nummer i Brenner/Scott. De kan anvendes uden bevis, men alle forudsætninger skal vises.

1. del. Sobolev rum:
Lad Ω være et 3 dimensionalt domæne med Lipschitz rand.

1: For hvilke heltallige, positive værdier af k gælder $\mathcal{L}^\infty(\Omega) \supseteq \mathcal{W}_2^k(\Omega)$?

2: For hvilke heltallige, positive værdier af k gælder $\mathcal{L}^2(\partial\Omega) \supseteq \mathcal{W}_2^k(\Omega)$?

3: For hvilke heltallige, positive værdier af k gælder $\mathcal{W}_2^1(\partial\Omega) \supseteq \mathcal{W}_2^k(\Omega)$?

2. del. Variations formulering af elliptiske randværdiproblemer:
Betragt for $k \in \mathcal{R}$ og $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ randværdiproblemet

$$-u'' + ku' + u = f \text{ på }]0,1[,\ u'(0) = u'(1) = 0, \tag{1}$$

og variationsproblemet

$$\text{Find } u \in \mathcal{H}^1(0,1):\ a(u,v) = F(v)\ \forall v \in \mathcal{H}^1(0,1),\ \text{hvor} \tag{2}$$
$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + ku'v + uv)dx,\ F(v) = \int_0^1 fvdx.$$

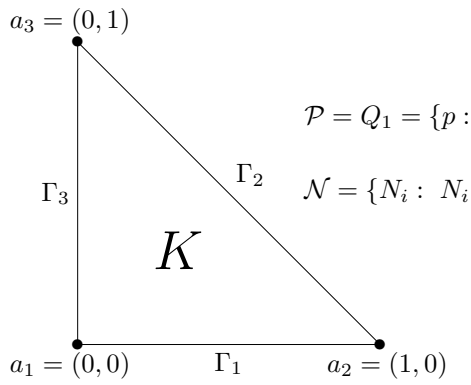
4: Vis, at hvis $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ løser (2), da løser u også (1).
(Et evt. tæthedsargument behøver ikke at blive givet i detaljer. En sætning a la "der er nok af sådanne funktioner til at et tæthedsargument viser ..." er tilstrækkeligt. Forudsat at udsagnet er korrekt selvfølgelig).

5: Vis, at a er koerciv på $\mathcal{H}^1(0,1)$ for $0 \le k < 2$.

6: Vis eksistens og entydighed af løsningen til (2) for $0 \le k < 2$.

7: $(0,1)$ opdeles i 5 lige store delintervaller. I hvert delinterval tilnærmes løsningen u til variationsproblemet (2) med et lineært polynomium. Frihedsgraderne vælges som funktionsværdierne i delintervallernes endepunkter. Der er således tale om kontinuerte, lineære Lagrange elementer i 1 dimension. Basisfunktionerne nummereres efter voksende koordinat af det punkt, hvor basisfunktionen antager værdien 1.
Opskriv det matrix-ligningssystem $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$ der repræsenterer diskretiseringen af (2) for $k = 0$, $f \equiv 1$. Udregn $\mathbf{b}$, men angiv bare $\mathbf{A}$ med 0 for elementer der er nul, og x for elementer der ikke er nul. Udregn dog elementet i øverste venstre hjørne af $\mathbf{A}$, d.v.s. a_{11}.

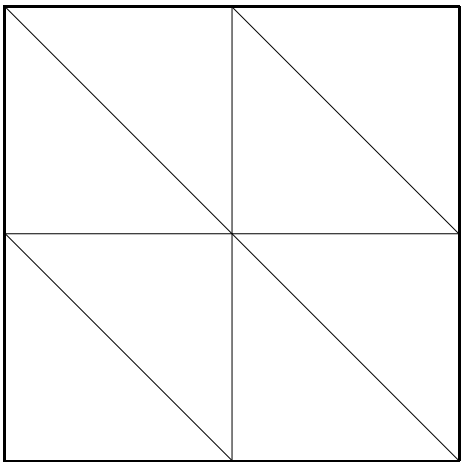
3. del. Endelige elementer og elementrum:



$$\mathcal{P} = Q_1 = \{p:\ p(x,y) = axy + bx + cy + d \text{ for reelle } a,b,c \text{ og } d\}$$
$$\mathcal{N} = \{N_i:\ N_i(\phi) = \phi(a_i) \text{ for } i = 1,2,3,\ N_4(\phi) = \textstyle\int_{\Gamma_2} \phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\}$$

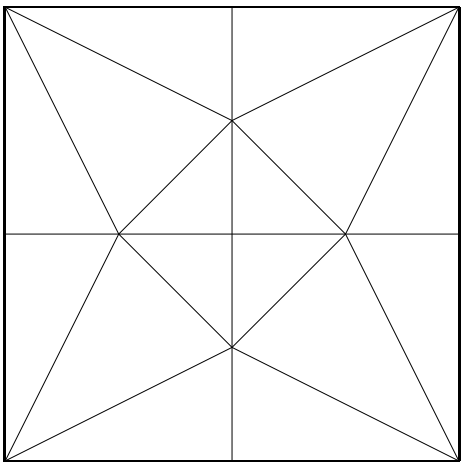
FIGUR 1. Definition af det endelige element $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$

8: Betragt det endelige element $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ defineret i figur 1. Definér knudepunktsbasen [nodal basis] for $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ og udregn funktionsudtrykket for den knudepunktsbasisfunktion ϕ, der antager værdien 1 i a_1.



FIGUR 2. Trianguleringen til opgave 9

9: Betragt den triangulering som er vist på figur 2. De endelige elementer på figur 2 er alle affin ækvivalente med reference elementet $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ som er defineret i figur 1. Γ_2 fra figur 1 afbildes på diagonalerne (de lange sider i trekanterne) i figur 2 i alle tilfælde.
Find kontinuitetsordenen r af den globale interpolant/finite element rummet (dvs. den globale glathed).
(Hjælp: Behandl diagonaler og akseparallelle kanter separat).



FIGUR 3. Trianguleringen til opgave 10

10: Betragt trianguleringen vist i figur 3, med endelige elementer der er affin ækvivalente med $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$, som defineret i figur 1. Hvorfor vil denne triangulering *ikke* give global kontinuitet af finite element rummet?

(Opgavesættet er slut).