# 3 AN eksamen, vinter 1998
# Reeksamen

Eksamenssættet afhentes mandag den 18. januar 1999 kl. 9.00 ved Matematisk Afdelings sekretariat og besvarelsen afleveres sammesteds tirsdag den 19. januar 1999 kl. 12.00..

**Studiekort skal fremvises ved afleveringen.**

Spørgsmål om uklarheder i opgaveteksten kan rettes til Ryszard Nest på tlf. 35320738 eller på 39628476 frem til klokken 20 mandag.

De gule opgaveark vedlagt bedes benyttet ved indskrivning af besvarelsen – skulle flere ark blive nødvendige kan man benytte eget papir.

**Hvert enkelt ark skal forsynes med eksamensnummer.**

Erklæringen på dette ark afleveres sammen med besvarelsen.

**Besvarelser modtages ikke uden en sådan erklæring.**

*Jeg erklærer herved at have udarbejdet vedlagte besvarelse alene, uden hjælp i nogen form fra andre personer. Jeg er bekendt med at diskussion* **i enhver form** *af eksamenssættets indhold udgør eksamenssnyd og vil blive behandlet efter regelsæt vedtaget af det Naturvidenskabelige Fakultetsstudienævn d. 25.5.1991, jf. fakultetets Studiehåndbøger.*

_____ _____

Dato Eks.nr.

**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999**

# Matematik 3 AN

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra mandag den 18. januar kl. 9 til tirsdag den 19. januar kl. 12.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgavesættet består af ialt 5 opgaver.

## Opgave 1

Lad $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ og $\{\eta_1, \eta_2, \dots\}$ være to ortonormale følger af vektorer i et Hilbert rum $h$. For et vilkårlig vektor $x \in h$ lad

$$T_N(x) = \sum_{n \leq N} c_i \langle x \mid \eta_n \rangle \xi_n$$

hvor $\{c_i\}$ er en given følge af komplekse tal.

**Vis følgende påstande:**

1. $\{T_N \to T$ i norm for et begrænset operator $T\} \iff \{\sup_i |c_i| < \infty\}$.
2. $\{T$ er Hilbert-Schmidt$\} \iff \{\sum_i |c_i|^2 < \infty\}$
3. $\{T$ er kompakt$\} \iff \{\lim_{i \to \infty} |c_i| = 0\}$
4. Find $T^*$.

## Opgave 2

Vi bruger

$$||f||_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$$

til at give struktur af et Banach rum på $X$:

$$X = \{f \in C[0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$$

(dvs. rummet af kontinuerte periodiske funktioner på intervalet $[0, 2\pi]$). En følge $\{f_n\}$ fra $X$ siges at konvergere uniformt mod en funktion f fra $X$ hvis

$$\lim_{n \to \infty} ||f_n - f||_\infty \to 0.$$



Opgave 2 fortsættes på side 2

**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999**
**Matematik 3 AN**

Givet $f \in X$, *dens partiale Fourier række* $T_n f$ er en (kontinuert, periodisk) funktion givet ved:

$$T_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} \left( \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-ikt) dt \right) \exp(ikx)$$

Der oplyses, at hvis $T_n$ betragtes som begrænsede lineare operatorer på $X$, da gælder at

$$||T_n|| \geq 4\pi^{-2} \sum_{k=1}^{n} k^{-1}.$$

**Vis følgende påstande:**

1. For $f \in X$,
$$\lim_{n \to \infty} ||T_n f - f||_2 = 0$$
($||f||_2$ betegner normen af $f$ som element af Hilbert rummet $L^2([0, 2\pi])$).
2. Der findes $f \in X$ for hvilke deres partiale Fourier rækker $T_n f$ er ikke uniformt konvergente.

## Opgave 3

Vi sætter, for $f \in L^2([0,1])$,

$$Kf(x) = \int_0^{2\pi} f(y) \cos(x - y) dy.$$

**Vis følgende påstande:**

1. $K$ er et selfadjungeret Hilbert-Schmidt operator på $L^2([0, 2\pi])$.
2. $K$ har endelig rang.
3. dim(Rg $K$)=2.
4. $K^2 = \frac{1}{4} K$ og find $||K||$.

## Opgave 4

Vi bruger $\mathcal{S}$ til at betegne rummet af Schwartz funktioner på $\mathbb{R}$. For et givet Schwartz funktion $f$ og $\epsilon > 0$ vi sætter

$$T_\epsilon(f) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\epsilon x^2} dx.$$

Opgave 4 fortsættes på side 3

**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999**
**Matematik 3 AN**

**Vis følgende påstande:**

1. $T_\epsilon$ er et tempereret distribution.
2. For et givet $\gamma > 0$ og $f \in \mathcal{S}$

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{-\gamma} f(x) e^{-\epsilon x^2} dx + \int_{\gamma}^{\infty} f(x) e^{-\epsilon x^2} dx \right) = 0$$

og

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} f(x) e^{-\epsilon x^2} dx = 1.$$

3. Når $\epsilon \to 0^+$ $T_\epsilon$ konvergerer som tempererede distributioner mod Dirac delta distributionen: $\delta(f) = f(0)$.

## Opgave 5

Som bekendt, et topologisk rum $X$ kaldes *separabel* hvis den indeholder en tæt følge af punkter.
Lad $B$ betegne et Banach rum og $B^*$ dens duale.

**Vis følgende påstande:**

1. $B^*$ er separabel $\Longrightarrow \{B$ indeholder en følge af elementer som separerer $B^*\}$.
2. $B^*$ er separabel $\Longrightarrow B$ er separabel.
3. Den duale af et separabelt Banach rum er ikke nødvendigvis separabel.