3AN eksamen, vinter 1999/2000
Vejledning

Eksamenssættet afhentes tirsdag 18.1.2000 klokken 9:00 ved sekretariatet for Matematisk Afdeling og besvarelsen afleveres sammesteds onsdag 19.1.2000 klokken 12:00.

Studiekort skal fremvises ved afleveringen.

Opgavesættet løber over 3 sider, dette ark ikke medtalt. Sættet består af ti delspørgsmål fordelt på tre opgaver. Ved vurdering af besvarelserne vægtes **delspørgsmålene** lige. De tre opgaver vægtes således ikke lige.

Spørgsmål om uklarheder i opgaveteksten kan rettes til Johannes Aastrup på telefon 35320760 frem til klokken 14 tirsdag.

De gule opgaveark vedlagt bedes benyttet ved indskrivning af besvarelsen – skulle flere ark blive nødvendige kan man benytte eget papir. **Hvert enkelt ark skal forsynes med eksamensnummer.**

Erklæringen på dette ark afleveres separat i underskrevet stand. **Besvarelser modtages ikke uden en sådan erklæring.**

Jeg erklærer herved at have udarbejdet vedlagte besvarelse alene, uden hjælp i nogen form fra andre personer. Jeg er bekendt med at diskussion i enhver form af eksamenssættets indhold udgør eksamenssnyd og vil blive behandlet efter regelsæt vedtaget af det Naturvidenskabelige Fakultetsstudienævn d. 21.5.1991, jf. fakultetets Studiehåndbøger.

_____	_____
Dato	*Navn*

Opgave 1

Betragt $C_0(\mathbb{R})$ (jf. MV Example 5.16(4)), som sædvanligt udstyret med den uniforme norm $\|\cdot\|_\infty$. Definer herudover seminormer

$$\|f\|_N = \sup_{x\in[-N,N]} |f(x)|$$

på $C_0(\mathbb{R})$ for hvert $N \in \mathbb{N}$.

I teksten herunder betegner f, f_n, g og h funktioner fra $C_0(\mathbb{R})$.

(a) Vis at

$$\|f_n\|_\infty \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|f_n\|_N \longrightarrow 0$$

når $n \longrightarrow \infty$, for ethvert $N \in \mathbb{N}$.

Lad $|||\cdot|||$ være en anden norm på $C_0(\mathbb{R})$, og antag at den ligesom $\|\cdot\|_\infty$ har egenskaben

$$|||f_n||| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|f_n\|_N \longrightarrow 0$$

når $n \longrightarrow \infty$, for ethvert $N \in \mathbb{N}$.

(b) Vis at hvis $\|f_n - g\|_\infty \longrightarrow 0$ og $|||f_n - h||| \longrightarrow 0$, så må $g = h$.

(c) Antag herudover at $(C_0(\mathbb{R}), |||\cdot|||)$ er et fuldstændigt rum. Vis at da er normerne $|||\cdot|||$ og $\|\cdot\|_\infty$ ækvivalente.

Vi betragter til slut den konkrete norm $\|\cdot\|_\Phi$ givet ved

$$\|f\|_\Phi = \|\Phi f\|_\infty$$

hvor $\Phi(t) = \exp(-|t|)$.

(d) Vis at $\|\cdot\|_\Phi$ opfylder

$$\|f_n\|_\Phi \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|f_n\|_N \longrightarrow 0,$$

men at $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\Phi)$ ikke er et fuldstændigt rum.

Opgave 2

Vi betragter et komplekst hilbertrum H med en tællelig basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, og definerer hertil en klasse

$$Z(H) = \{A \in B(H) \mid \forall i, j \in \mathbb{N} : \langle Ae_i, e_j \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

Bemærk at operatorerne i $Z(H)$ netop er dem hvis matrix med hensyn til $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ udelukkende har heltallige indgange.

Der erindres om at klasserne $K(H)$ og $F(H)$ er defineret som de operatorer på H som er kompakte, henholdsvis har endelig-dimensionalt billede.

(a) Vis ved eksempel at $Z(H)\backslash K(H) \neq \emptyset$, altså at der findes en operator i $Z(H)$ som *ikke* er kompakt.

Vis ved et andet eksempel at der findes $A \in Z(H)$ med $\sigma(A) \not\subseteq \mathbb{Z}$, altså at en operator i $Z(H)$ kan have spektralværdier der ikke er hele tal.

(b) Lad $A \in Z(H)$ og et heltal $M \in \mathbb{N}$ være givne. Vis at der findes $N \in \mathbb{N}$ sådan at

$$\langle Ae_M, e_n \rangle = 0 = \langle Ae_n, e_M \rangle$$

for hvert $n \geq N$.

(c) Vis at hvis $A, B \in Z(H)$ da vil også $AB \in Z(H)$.

(d) Vis at $Z(H) \cap K(H) = Z(H) \cap F(H)$, altså at en operator i $Z(H)$ er kompakt netop når den har endelig rang.
[Vink: Vis fx først, gerne ved henvisning til en opgave fra ugesedlerne, at med $A \in K(H)$ så vil $\|Ae_n\| \longrightarrow 0$ når $n \longrightarrow \infty$]

Opgave 3

Lad X være et normeret vektorrum over $\mathbb{R}$, og betragt to vektorer $y, z \in X$. Der erindres om at y og z er *lineært uafhængige* netop når

$$\alpha y + \beta z = 0$$

kun forekommer for $\alpha = \beta = 0$. Vi siger at de to vektorer er *lineært afhængige* hvis de ikke er lineært uafhængige.

(a) Antag at der findes et $\gamma \in \mathbb{R}$ så at

$$\varphi(y) = \gamma\varphi(z)$$

gælder for alle kontinuerte funktionaler $\varphi \in X^*$. Vis at da er y og z lineært afhængige.

(b) Antag at y og z er lineært uafhængige. Vis at da findes, for hvert $\gamma \in \mathbb{R}$, en kontinuert funktional $\varphi \in X^*$ med

$$\varphi(y) = 5\gamma \qquad \varphi(z) = 5$$