Eks. nr. 43

3AN eksamen, forår 1999
Rudin version!
Vejledning

Eksamenssættet afhentes mandag 28.6.1999 klokken 9:00 ved Matematisk Afdelings sekretariat og besvarelsen afleveres sammesteds tirsdag 29.6.1999 klokken 12:00.

Studiekort skal fremvises ved afleveringen.

Den danske version af opgavesættet løber over 3 sider, dette ark ikke medtalt. Sættet består af tolv delspørgsmål fordelt på tre opgaver. Ved vurdering af besvarelserne vægtes delspørgsmålene lige. De tre opgaver vægtes således **ikke** lige.

Spørgsmål om uklarheder i opgaveteksten kan rettes til Søren Eilers på 35320757 frem til klokken 16 mandag.

De gule opgaveark vedlagt bedes benyttet ved indskrivning af besvarelsen – skulle flere ark blive nødvendige kan man benytte eget papir. **Hvert enkelt ark skal forsynes med eksamensnummer.**

Erklæringen på dette ark afleveres separat i underskrevet stand. **Besvarelser modtages ikke uden en sådan erklæring.**

Jeg erklærer herved at have udarbejdet vedlagte besvarelse alene, uden hjælp i nogen form fra andre personer. Jeg er bekendt med at diskussion i enhver form af eksamenssættets indhold udgør eksamenssnyd og vil blive behandlet efter regelsæt vedtaget af det Naturvidenskabelige Fakultetsstudienævn d. 21.5.1991, jf. fakultetets Studiehåndbøger.

Dato	*Navn*

Opgave 1

Betragt to afsluttede underrum X og Y af det reelle banachrum E. Vi interesserer os for udsagnet

$$\exists C > 0 \forall x \in X \forall y \in Y : \|x\| \leq C \|x + y\| \qquad (*)$$

Der erindres om notationen $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$. Endvidere betragter vi rummet $X \times Y$ udstyret med normen $|||(x, y)||| = \|x\| + \|y\|$, og afbildningen $\Lambda : X \times Y \longrightarrow E$ givet ved

$$\Lambda(x, y) = x + y$$

(a) Vis at hvis $X \cap Y = \{0\}$, så er Λ kontinuert med nulrum $\mathcal{N}(\Lambda) = \{0\}$ og billede $\mathcal{R}(\Lambda) = X + Y$.

(b) Vis at $(*)$ medfører at $X \cap Y = \{0\}$.

Vi betragter nu også udsagnet

$$X \cap Y = \{0\} \text{ og } X + Y \text{ er afsluttet} \qquad (**)$$

(c) Vis at $(*)$ medfører at $X + Y$ er et fuldstændigt underrum af E. Konkludér at $(*) \Longrightarrow (**)$.

(d) Vis at $(**) \Longrightarrow (*)$.

Lad nu E være banachrummet $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Sæt som sædvanlig, for $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

med ettallet på den n'te plads, og lad

$$X = \overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n \text{ er lige}\}} \subseteq E = \ell^1$$

(e) Find et afsluttet underrum Y af $E = \ell^1$ sådan at $X + Y$ ikke er afsluttet.

Opgave 2

Lad H betegne det komplekse hilbertrum $L_2([0, 2\pi])$ udstyret med det sædvanlige indre produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Det antages kendt, og ønskes derfor ikke bevist, at mængden

$$\mathcal{O} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\middle| n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

udgør en ortonormalbasis for H.

(a) Vis at der er én og kun én operator $T \in \mathcal{B}(H)$ med egenskaben

$$T1 = 1 \qquad T\sin(nx) = \frac{1}{n}\cos(nx) \qquad T\cos(nx) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

(b) Vis at vektorerne i $\mathcal{O}$ kan indiceres over $\mathbb{N}$ som

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_{2n}, e_{2n+1}, \ldots$$

således at den tilsvarende matrix $(\langle Te_j, e_i\rangle)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ for T bliver af formen

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & \frac{1}{n} & \\ & & & & & & \frac{1}{n} & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

med nul på alle tomme pladser.

(c) Vis at T er en kompakt og selvadjungeret operator.

(d) Bestem egenværdierne for T, og bestem spektret $\sigma(T)$ for T. *Vink: Start med at bestemme egenværdierne for 2×2-matricer af formen* $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$.

(e) Bestem et **uendeligdimensionalt** afsluttet underrum X af H sådan at

$$\langle Tx, x\rangle \leq 0$$

for alle $x \in X$.

Opgave 3

Lad δ_x betegne δ-distributionen med støtte i $\{x\}$,

$$\delta_x(\phi) = \phi(x) \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(a) Vis at der defineres en distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ved

$$\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n.$$

Afgør om Λ er en tempereret distribution som defineret i Rudin 7.11.

(b) Bestem en kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ så at

$$\Lambda = D^2 \Lambda_f$$

hvor Λ_f er distributionen defineret ved

$$\Lambda_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx, \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$