3AN eksamen, forår 1999
Vejledning

Eksamenssættet afhentes mandag 28.6.1999 klokken 9:00 ved Matematisk Afdelings sekretariat og besvarelsen afleveres sammesteds tirsdag 29.6.1999 klokken 12:00.

Studiekort skal fremvises ved afleveringen.

Opgavesættet forefindes på dansk og engelsk. Besvarelsen kan udformes på et af disse sprog efter eget valg.

Den danske version af opgavesættet løber over 3 sider, dette ark ikke medtalt. Sættet består af tolv delspørgsmål fordelt på tre opgaver. Ved vurdering af besvarelserne vægtes <u>delspørgsmålene</u> lige. De tre opgaver vægtes således **ikke** lige.

Spørgsmål om uklarheder i opgaveteksten kan rettes til Søren Eilers på 35320757 frem til klokken 16 mandag.

De gule opgaveark vedlagt bedes benyttet ved indskrivning af besvarelsen – skulle flere ark blive nødvendige kan man benytte eget papir. **Hvert enkelt ark skal forsynes med eksamensnummer.**

Erklæringen på dette ark afleveres separat i underskrevet stand. **Besvarelser modtages ikke uden en sådan erklæring.**

Jeg erklærer herved at have udarbejdet vedlagte besvarelse alene, uden hjælp i nogen form fra andre personer. Jeg er bekendt med at diskussion <u>i enhver form</u> af eksamenssættets indhold udgør eksamenssnyd og vil blive behandlet efter regelsæt vedtaget af det Naturvidenskabelige Fakultetsstudienævn d. 21.5.1991, jf. fakultetets Studiehåndbøger.

__________ ______________________________

Dato *Navn*

Opgave 1

Betragt to afsluttede underrum X og Y af det reelle banachrum E. Vi interesserer os for udsagnet

$$\exists C > 0 \forall x \in X \forall y \in Y : \|x\| \leq C \|x + y\| \tag{$*$}$$

Der erindres om notationen $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$. Endvidere betragter vi rummet $X \times Y$ udstyret med normen $|||(x, y)||| = \|x\| + \|y\|$, og afbildningen $\Lambda : X \times Y \longrightarrow E$ givet ved

$$\Lambda(x, y) = x + y$$

(a) Vis at hvis $X \cap Y = \{0\}$, så er Λ kontinuert med kerne $N(\Lambda) = \{0\}$ og billede $R(\Lambda) = X + Y$.

(b) Vis at $(*)$ medfører at $X \cap Y = \{0\}$.

Vi betragter nu også udsagnet

$$X \cap Y = \{0\} \text{ og } X + Y \text{ er afsluttet} \tag{$**$}$$

(c) Vis at $(*)$ medfører at $X + Y$ er et fuldstændigt underrum af E. Konkludér at $(*) \Longrightarrow (**)$.

(d) Vis at $(**) \Longrightarrow (*)$.

Lad nu E være banachrummet $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Sæt som sædvanlig, for $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

med ettallet på den n'te plads, og lad

$$X = \overline{\text{span}\{e_n \mid n \text{ er lige}\}} \subseteq E = \ell^1$$

(e) Find et afsluttet underrum Y af $E = \ell^1$ sådan at $X + Y$ ikke er afsluttet.

Opgave 2

Lad H betegne det komplekse hilbertrum $L_2([0,2\pi])$ udstyret med det sædvanlige indre produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Det antages kendt, og ønskes derfor ikke bevist, at mængden

$$\mathcal{O} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

udgør en ortonormalbasis for H.

(a) Vis at der er én og kun én operator $T \in L(H)$ med egenskaben

$$T1 = 1 \qquad T\sin(nx) = \frac{1}{n}\cos(nx) \qquad T\cos(nx) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

(b) Vis at vektorerne i $\mathcal{O}$ kan indiceres over $\mathbb{N}$ som

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}, \dots$$

således at den tilsvarende matrix $(\langle Te_j, e_i\rangle)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ for T bliver af formen

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & \frac{1}{n} & \\ & & & & & & \frac{1}{n} & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

med nul på alle tomme pladser.

(c) Vis at T er en kompakt og selvadjungeret operator.

(d) Bestem egenværdierne for T, og bestem spektret $\sigma(T)$ for T. *Vink: Start med at bestemme egenværdierne for* 2×2*-matricer af formen* $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$.

(e) Bestem et **uendeligdimensionalt** afsluttet underrum X af H sådan at

$$\langle Tx, x\rangle \le 0$$

for alle $x \in X$.

Opgave 3

Lad X og Y være normerede rum over $\mathbb{C}$ og lad $A : X \longrightarrow Y$ være en lineær afbildning. Det forudsættes **ikke** at A er kontinuert. Det forudsættes **ikke** at X og Y er fuldstændige rum.

(a) Antag at der for ethvert $x \in X$ gælder at mængden

$$\{y(Ax) \mid y \in Y'\}$$

er en begrænset delmængde af $\mathbb{C}$. Vis at $A = 0$.

(b) Antag at der for ethvert $y \in Y'$ gælder at mængden

$$\{y(Ax) \mid x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

er en begrænset delmængde af $\mathbb{C}$. Vis at $A \in L(X, Y)$.

3AN final exam, spring 1999
Instructions

The problem set can be picked up on Monday, June 28th, 1999 at 9:00 AM at the secretariat of the Department of Mathematics. The solutions must be returned the same place on Tuesday June 29th, 1999 at noon.

Your student ID (studiekort) must be shown when handing in your solution.

The problems are provided in both Danish and English. The solution may be written in either one of these two languages.

The English version of the problem set runs 3 pages, not counting this one. It consists of twelve questions distributed over three problems. When evaluating the solutions, we give the questions equal weight. Consequently, the problems are **not** weighed equally.

Questions about imprecisions in the problems may be directed to Søren Eilers on 35320757 until 4 PM Monday.

The yellow sheets of paper enclosed are preferred. If more paper is needed, other types of paper are also accepted. **Every single sheet must be marked with your exam number.**

Furthermore, the statement on the front page (see translation below) must be signed and handed in separately. **Solutions are not accepted without such a signed statement.**

I hereby declare to have produced the enclosed solution singlehandedly, not having accepted help in any form from other persons. I understand that any form of discussion of the content of the problem set constitutes fraud and will be subjected to rules of May 21st, 1991, of the university's Faculty of Science.

Problem 1

Consider two closed subspaces X and Y of the real Banach space E. We are concerned with the statement

$$\exists C > 0 \forall x \in X \forall y \in Y : \|x\| \leq C \|x + y\| \tag{$*$}$$

We recall the notation $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$. Further, we consider the space $X \times Y$ equipped with the norm $|\!|\!|(x, y)|\!|\!| = \|x\| + \|y\|$, and the map $\Lambda : X \times Y \longrightarrow E$ defined by

$$\Lambda(x, y) = x + y$$

(a) Show that if $X \cap Y = \{0\}$, then Λ is continuous with kernel $N(\Lambda) = \{0\}$ and range $R(\Lambda) = X + Y$.

(b) Show that $(*)$ implies that $X \cap Y = \{0\}$.

We now also consider the statement

$$X \cap Y = \{0\} \text{ and } X + Y \text{ is closed} \tag{$**$}$$

(c) Show that $(*)$ implies that $X + Y$ is a complete subspace of E. Conclude that $(*) \Longrightarrow (**)$.

(d) Show that $(**) \Longrightarrow (*)$.

Now let E be the Banach space $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. As usual, for $n \in \mathbb{N}$, let

$$e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

with the number one in the nth slot, and let

$$X = \overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n \text{ is even}\}} \subseteq E = \ell^1$$

(e) Find a closed subspace Y of $E = \ell^1$ so that $X + Y$ is not closed.

Problem 2

Let H denote the complex Hilbert space $L_2([0, 2\pi])$ equipped with the usual inner product

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

It is assumed to be well known, and hence does not require proof, that

$$\mathcal{O} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

constitutes an orthonormal basis for H.

(a) Show that there is exactly one operator $T \in L(H)$ satisfying

$$T1 = 1 \qquad T\sin(nx) = \frac{1}{n}\cos(nx) \qquad T\cos(nx) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

(b) Show that the vectors in $\mathcal{O}$ can be indexed over $\mathbb{N}$ as

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_{2n}, e_{2n+1}, \ldots$$

in such a way that the matrix $(\langle Te_j, e_i\rangle)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ for T becomes of the form

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & \frac{1}{n} & \\ & & & & & & \frac{1}{n} & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

with zeroes at all empty slots.

(c) Show that T is a compact and self-adjoint operator.

(d) Determine the eigenvalues for T, and determine the spectrum $\sigma(T)$ of T. *Hint: Start by finding the eigenvalues for 2×2-matrices on the form* $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$.

(e) Determine an **infinite-dimensional** closed subspace X of H such that

$$\langle Tx, x\rangle \leq 0$$

for all $x \in X$.

Problem 3

Let X and Y be normed spaces over $\mathbb{C}$ and let $A : X \longrightarrow Y$ be a linear map. It is **not** assumed that A is continuous. It is **not** assumed that X and Y are complete spaces.

(a) Suppose that for every $x \in X$, the set

$$\{y(Ax) \mid y \in Y'\}$$

is a bounded subset of $\mathbb{C}$. Show that $A = 0$.

(b) Suppose that for every $y \in Y'$, the set

$$\{y(Ax) \mid x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

is a bounded subset of $\mathbb{C}$. Show that $A \in L(X, Y)$.