Matematik 3 AN

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra mandag den 18. januar kl. 9 til tirsdag den 19. januar kl. 12.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgavesættet består af ialt 5 opgaver.

Opgave 1

Lad $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ og $\{\eta_1, \eta_2, \dots\}$ være to ortonormale følger af vektorer i et Hilbert rum h. For et vilkårlig vektor $x \in h$ lad

$$T_N(x) = \sum_{n \leq N} c_i \langle x \mid \eta_n \rangle \xi_n$$

hvor $\{c_i\}$ er en given følge af komplekse tal.

Vis følgende påstande:

1. $\{T_N \to T$ i norm for et begrænset operator $T\} \iff \{\sup_i |c_i| < \infty\}$.
2. $\{T$ er Hilbert-Schmidt$\} \iff \{\sum_i |c_i|^2 < \infty\}$
3. $\{T$ er kompakt$\} \iff \{\lim_{i\to\infty} |c_i| = 0\}$
4. Find T^*.

Opgave 2

Vi bruger

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

til at give struktur af et Banach rum på X:

$$X = \{f \in C[0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$$

(dvs. rummet af kontinuerte periodiske funktioner på intervalet $[0, 2\pi]$). En følge $\{f_n\}$ fra X siges at konvergere uniformt mod en funktion f fra X hvis

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty \to 0.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

Givet $f \in X$, *dens partiale Fourier række* $T_n f$ er en (kontinuert, periodisk) funktion givet ved:

$$T_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \exp(-ikt) dt \right) \exp(ikx)$$

Der oplyses, at hvis T_n betragtes som begrænsede lineare operatorer på X, da gælder at

$$||T_n|| \geq 4\pi^{-2} \sum_{k=1}^{n} k^{-1}.$$

Vis følgende påstande:

1. For $f \in X$,
$$\lim_{n \to \infty} ||T_n f - f||_2 = 0$$
($||f||_2$ betegner normen af f som element af Hilbert rummet $L^2([0, 2\pi])$).
2. Der findes $f \in X$ for hvilke deres partiale Fourier rækker $T_n f$ er ikke uniformt konvergente.

Opgave 3

Vi sætter, for $f \in L^2([0,1])$,

$$Kf(x) = \int_0^{2\pi} f(y) \cos(x-y) dy.$$

Vis følgende påstande:

1. K er et selfadjungeret Hilbert-Schmidt operator på $L^2([0, 2\pi])$.
2. K har endelig rang.
3. dim(Rg K)=2.
4. $K^2 = \frac{1}{4} K$ og find $||K||$.

Opgave 4

Vi bruger $\mathcal{S}$ til at betegne rummet af Schwartz funktioner på $\mathbb{R}$. For et givet Schwartz funktion f og $\epsilon > 0$ vi sætter

$$T_\epsilon(f) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\epsilon x^2} dx.$$

Opgave 4 fortsættes på side 3

Vis følgende påstande:

1. T_ϵ er et tempereret distribution.
2. For et givet $\gamma > 0$ og $f \in \mathcal{S}$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-\gamma} f(x) e^{-\epsilon x^2} dx + \int_{\gamma}^{\infty} f(x) e^{-\epsilon x^2} dx \right) = 0$$

og

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} f(x) e^{-\epsilon x^2} dx = 1.$$

3. Når $\epsilon \to 0^+$ T_ϵ konvergerer som tempererede distributioner mod Dirac delta distributionen: $\delta(f) = f(0)$.

Opgave 5

Som bekendt, et topologisk rum X kaldes *separabel* hvis den indeholder en tæt følge af punkter.
Lad B betegne et Banach rum og B^* dens duale.

Vis følgende påstande:

1. B^* er separabel $\Longrightarrow$ $\{B$ indeholder en følge af elementer som separerer $B^*\}$.
2. B^* er separabel $\Longrightarrow$ B er separabel.
3. Den duale af et separabelt Banach rum er ikke nødvendigvis separabel.