Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1997-98

Matematik 3 AN

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra mandag den 26. januar kl. 9 til tirsdag den 27. januar kl.. 12.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer(mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

1° Lad $T \in B(h)$ være en kompakt operator på det komplekse Hilbert rum h. Lad $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en orthonormal basis for h.

Vis, at

$$\|Te_n\| \to 0\,, \quad n \to \infty.$$

2° Lad $S \in B(h)$ være givet ved

$$Se_n = \frac{1}{n}e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vis, at S er kompakt.

3° Find samtlige egenværdier for S.

Opgave 2

Lad X være et vektorrum og X' dets algebraiske duale, dvs. vektorrummet af alle lineære funktionaler på X. Vi giver X topologien bestemt af familien af seminormer

$$\{x \to |\varphi(x)| \mid x \in X\,,\ \varphi \in X'\}.$$

Lad Y være et vilkårligt Banach rum.

a) Vis, at for $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ i X' er den lineær afbildning af formen

$$X \ni x \to \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y_i \in Y$$

kontinuert.

Opgave 2 fortsættes på side 2

b) Vis, at hvis $T : X \to Y$ er en lineær afbildning og $\dim Y < \infty$, så er T kontinuert.

c) Lad $T : X \to Y$ være kontinuert.

Vis, at der findes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X'$ så at

$$\|Tx\| \leq \sup_i |\varphi_i(x)| \quad x \in X.$$

Vis endvidere af dimensionen af billedet af T er endelig.

Opgave 3

a) Lad u være en distribution i $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ med

$$\operatorname{supp} u \subset \mathbb{N}.$$

Vis, at

$$\lim_{x \to 0} \frac{u - \tau_x u}{x} = Du$$

i $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

b) Lad $T_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ være temperende distributioner givet ved

$$T_n \varphi = e^n \varphi(n).$$

Vis, at $T_n \to 0$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ men T_n er ikke konvergent i $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

c) Vis, at funktionen $e^x \cos(e^x)$ definerer en tempereret distribution medens funktionen e^x ikke gør det.