Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1997

Matematik 3 AN

Opgavesæt til besvarelse ved hjemtagning fra fredag den 13. juni kl. 9.00 til lørdag den 14. juni kl. 12.00.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.)

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

Lad X være et normeret vektorrum og betragt afbildninger

$$\begin{aligned} R &: X \to X \\ S &: X^* \to X^* \end{aligned}$$

som opfylder

$$\langle Rx, \chi^* \rangle = \langle x, S\chi^* \rangle \ \forall x \in X, \chi^* \in X^* \,.$$

1° Vis at R og S er lineære afbildninger.

2° Vis at S er kontinuert i norm.

3° Vis, ved hjælp af 2°, at også R er kontinuert i norm.

Opgave 2

Lad δ_x betegne Dirac δ-distributionen med støtte i $x \in \mathbb{R}$, dvs.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \,, \quad \delta_x(\varphi) = \varphi(x) \,.$$

Lad $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ være en tosidet følge af komplekse tal og $\{n_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en tosidet følge af ikke negative hele tal.

1° Vis at de partielle summer

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ |k|\leq N}} c_k \left(\frac{d}{dx}\right)^{n_k} \delta_k$$

konvergerer mod en distribution i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, når $N \to \infty$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

I det følgende betegner vi denne distribution med Λ.

2° Vis at Λ har kompakt støtte, hvis og kun hvis mængden

$$\{k \mid c_k \neq 0\}$$

er endelig.

3° Vis at $\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (er tempereret) hvis følgende to betingelser er opfyldt
(i) $\{n_k \mid c_k \neq 0\}$ er opad begrænset.
(ii) Der findes to konstanter C, N, så at

$$\forall k \in \mathbb{Z}\,,\ |c_k| \leq C(1+k^2)^N\,.$$

4° Vis omvendt at hvis $\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (er tempereret), så gælder (i) og (ii).

Opgave 3

Lad h være et separabelt Hilbertrum over de komplekse tal og betragt $T, U \in B(h)$ sådan at

$$U = 1 - T\,,$$

og sådan at U er unitær og T er kompakt.

1° Vis at T er normal og at der findes en ortonormalbasis for h bestående af egenvektorer for U.

2° Vis at hvis egenværdierne for U arrangeres til en følge $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, så gælder

$$\lambda_n \to 1\,,\ n \to \infty\,.$$

3° Antag nu videre, at U er selvadjungeret. Vis at $\frac{1}{2}T$ er en ortogonal projektion.