**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000**

# Matematik 3 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen Hjælpemidler

Opgavesættet består af 5 opgaver og er på 2 sider.

## **Opgave 1** (Vægt 33%)

Der ønskes en redegørelse for hovedpunkterne i beviserne for Sylows gruppesætninger.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 66 er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 66 indeholder et element af orden 33.

## **Opgave 2** (Vægt 10%)

Formuler (uden bevis) den kvadratiske reciprocitetssætning samt første og andet supplement til denne.

Undersøg, om 42 er kvadratisk rest modulo 89.

Undersøg, om -33 er kvadratisk rest modulo 79.

## **Opgave 3** (Vægt 5%)

Formuler (uden bevis) Gauss's sætning vedrørende konstruktion af regulære polygoner med passer og lineal.

Angiv om den regulære $n$-kant er konstruerbar med passer og lineal, når

1) $n = 51$,

2) $n = 52$,

3) $n = 60$.

## **Opgave 4** (Vægt 30%)

1) Vis, at polynomierne

$$f_1(x) = x^3 - 2,\ f_2(x) = x^5 - 2,\ f_3(x) = x^{15} - 2$$

er irreducible i $\mathbb{Q}[X]$.


Opgave 4 fortsættes på side 2

Lad $M_i$ for i= 1,2 og 3 være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $f_i(x)$.

2) Vis, at $M_1, M_2$ og $M_3$ er normale udvidelser af $\mathbb{Q}$ og bestem dimensionerne $[M_1 : \mathbb{Q}], [M_2 : \mathbb{Q}]$ og $[M_3 : \mathbb{Q}]$.
3) Angiv for hver af Galoisgrupperne $Gr(M_i/\mathbb{Q})$ (i= 1,2,3), hvorvidt de er abelske og hvorvidt de er opløselige.
4) Vis, at $M_3$ er kompositet af $M_1$ og $M_2$.
5) Angiv $M_1 \cap M_2$ og undersøg, om $Gr(M_3/\mathbb{Q})$ er isomorf med det direkte produkt $Gr(M_1/\mathbb{Q}) \times Gr(M_2/\mathbb{Q})$.
6) Angiv kommutatorgrupperne for hver af grupperne $Gr(M_i/\mathbb{Q})$, (i = 1,2,3).

## **Opgave 5** (Vægt 22%)

1) Vis, at polynomiet $f(x) = x^5 - 18x + 3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle rødder.
2) Lad $M$ være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $f(x)$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q})$. Undersøg, om $f(x)$ er opløseligt ved rodtegn.

Lad $\alpha, \beta$ og $\gamma$ være tre forskellige rødder til $f(x)$.

3) Angiv dimensionerne $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}]$ og $[(\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta)) : \mathbb{Q}]$.
4) Angiv dimensionerne $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) : \mathbb{Q}]$ og $[(Q(\alpha, \beta) \cap \mathbb{Q}(\gamma)) : \mathbb{Q}]$.