Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999

Matematik 3 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler.

Opgave 1 (Vægt 25%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for, at en endelig gruppe er opløselig, såfremt alle Sylowgrupperne er cykliske. (Den i beviset benyttede sætning af Burnside ønskes citeret men ikke bevist.)

Undersøg, om enhver gruppe af orden $5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden $5 \cdot 9$ er abelsk.

Undersøg, om enhver gruppe af orden $2 \cdot 5 \cdot 7$ er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden $2 \cdot 5 \cdot 7$ er abelsk.

Opgave 2 (Vægt 20%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for den kvadratiske reciprocitetssætning.

Undersøg, om 6 er kvadratisk rest modulo 137.

Undersøg, om 31 er kvadratisk rest modulo 127.

Opgave 3 (Vægt 30%)

Lad $\mathbb{Q}_n$ betegne det n-te cirkeldelingslegeme $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$.

1) Vis, at $\mathbb{Q}_7 = \mathbb{Q}_{14}$ og angiv Galoisgruppen $Gr(\mathbb{Q}_7/\mathbb{Q})$.
2) Vis, at $\mathbb{Q}_7$ indeholder netop ét dellegeme K af dimension 2 over $\mathbb{Q}$ og netop ét dellegeme L af dimension 3 over $\mathbb{Q}$. Vis, at L er indeholdt i de reelle tals legeme, mens K indeholder ikke-reelle tal.

Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for polynomiet $f(X) = X^{14} - 2$.

3) Vis, at intet af tallene $(\sqrt[14]{2})^t, 1 \leqq t \leqq 13$ ligger i $\mathbb{Q}_7$.
4) Vis, at polynomiet $f(X)$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}_7[X]$.
5) Vis, at M er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ og angiv dimensionen $[M : \mathbb{Q}]$.
6) Undersøg, om Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q})$ er opløselig og om $Gr(M/\mathbb{Q})$ er abelsk.
7) Bestem ordenen af kommutatorgruppen for $Gr(M/\mathbb{Q})$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (Vægt 25%)

1) Vis, at polynomiet $g(X) = X^5 - 8X + 2$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle rødder til $g(X)$.

Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $g(X)$.

2) Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er normal og angiv Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q})$.
   Er $g(X)$ opløseligt ved rodtegn?

3) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 2, der har en rod i M.

4) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 4, der har en rod i M.

5) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 30, der har en rod i M.