Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-99

Matematik 3 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler.

Opgave 1 (Vægt 25%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for, at en endelig gruppe er opløselig, såfremt alle Sylowgrupperne er cykliske. (Den her benyttede sætning af Burnside ønskes citeret men ikke bevist.)

Undersøg, om enhver gruppe af orden $5 \cdot 13 \cdot 19$ er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden $5 \cdot 13 \cdot 19$ er cyklisk.

Undersøg, om enhver gruppe af orden $5 \cdot 12 \cdot 19$ er opløselig.

Opgave 2 (Vægt 20%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for den kvadratiske reciprocitetssætning.

Undersøg, om 37 er kvadratisk rest modulo 41.

Undersøg, om 37 er kvadratisk rest modulo 43.

Opgave 3 (Vægt 30%)

Lad $\mathbb{Q}_n$ betegne det n-te cirkeldelingslegeme $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$.

1) Bestem Galoisgrupperne $Gr(\mathbb{Q}_8/\mathbb{Q})$ og $Gr(\mathbb{Q}_{16}/\mathbb{Q})$.
2) Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $X^4 - 2$. Bestem $[M : \mathbb{Q}]$ og $Gr(M/\mathbb{Q})$ og godtgør, at M indeholder $\mathbb{Q}_8$.
3) Vis, at kompositet $M\mathbb{Q}_{16}$ er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ og bestem dimensionen $[M\mathbb{Q}_{16} : \mathbb{Q}]$.
4) Vis, at polynomiet $f(X) = X^4 - 2X^2 + 2$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$, og at spaltningslegemet N for $f(X)$ over $\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$, der indeholder $\mathbb{Q}_8$.
5) Vis, at kompositet $M\mathbb{Q}_{16}$ er lig kompositet $N\mathbb{Q}_{16}$.
6) Bestem dimensionen $[N\mathbb{Q}_{16} : N]$.
7) Bestem dimensionen $[N : \mathbb{Q}]$ og Galoisgruppen $Gr(N/\mathbb{Q})$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (Vægt 25%)

1) Vis, at polynomiet $f(X) = X^5 - 6X + 2$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle rødddder til $f(X)$.
2) Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem $Gr(M/\mathbb{Q})$. Er $f(X)$ opløselig ved rodtegn?
3) Undersøg, om der findes et irreducibelt fjerdegradspolynomium i $\mathbb{Q}[X]$, der har en rod i M.
4) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 20, der har en rod i M.
5) Undersøg, om polynomiet $X^{20} - 6X^5 + 2$ har en rod i M.
6) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 40, der har en rod i M.
7) Undersøg, om polynomiet $X^{40} - 6X^8 + 2$ har en rod i M.