Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1998

Matematik 3 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Ingen hjælpemidler

Opgave 1 (Vægt 35 %)

Der ønskes en redegørelse for hovedpunkterne i beviserne for Sylows gruppesætninger.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 300 er opløselig.

Undersøg, om der findes en gruppe af orden 300, hvis centrum har orden 20.

Undersøg, om der findes en gruppe af orden 300, hvis centrum har orden 5.

Opgave 2 (Vægt 15 %)

Formuler (uden beviser) hovedsætningen angående polynomier, der er opløselige ved rodtegn.

Undersøg, hvilke af følgende polynomier, der er opløselige ved rodtegn:

$X^4 - 10X + 2$

$X^8 - 10X^2 + 2$

$X^5 - 10X + 2$

$X^{10} - 10X^2 + 2$.

Opgave 3 (Vægt 25 %)

1) Vis, at polynomiet $f(X) = X^4 - 6X^2 + 2$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$, og vis, at spaltningslegemet M for $f(X)$ er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$. Godtgør, at M indeholder et dellegeme L, der er normal over $\mathbb{Q}$ med Kleins Vierergruppe som Galoisgruppe.

2) Bestem Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q})$. (Benyt f.eks., at enhver automorfi i $Gr(L/\mathbb{Q})$ kan fortsættes til en automorfi i $Gr(M/\mathbb{Q})$.)

Opgave 4 (Vægt 25 %)

1) Lad $\mathbb{Q}_9$ være cirkeldelingslegemet $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/9})$. Vis, at $\mathbb{Q}_9/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse, hvis Galoisgruppe $Gr(\mathbb{Q}_9/\mathbb{Q})$ er cyklisk af orden 6. Godtgør, at $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ er det eneste dellegeme af $\mathbb{Q}_9$, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er 2.

Opgave 4 fortsættes på side 2

2) Vis, at intet af tallene $(\sqrt[9]{3})^t, 1 \leqq t \leqq 8$ tilhører $\mathbb{Q}_9$ og godtgør herved, at polynomiet $X^9 - 3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}_9[X]$.

3) Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $X^9 - 3$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem $[M : \mathbb{Q}]$.

4) Bestem antallet af 3-Sylowgrupper i $Gr(M/\mathbb{Q})$ og angiv herved de dellegemer af M, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er 2.