Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1997-98

Matematik 3 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Ingen hjælpemidler

Opgave 1 (Vægt 35 %)

Der ønskes en redegørelse for hovedpunkterne i beviserne for Sylows gruppesætninger.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 500 er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 99 er abelsk.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 99 er cyklisk.

Opgave 2 (Vægt 10 %)

Formuler (uden beviser) den kvadratiske reciprocitetssætning samt første og andet supplement til denne.

Undersøg, om 43 er kvadratisk rest modulo 71.

Lad x og y være indbyrdes primiske hele tal. Undersøg, om det for enhver ulige primdivisor p i $x^2 + 2y^2$ gælder, at p må være $\equiv 1$ eller 3 (mod 8).

Opgave 3 (Vægt 35 %)

Lad M_1 være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $X^4 - 3$ og M_2 spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $X^4 + 3$.

1) Vis, at $M_1/\mathbb{Q}$ er normal og bestem Galoisgruppen $Gr(M_1/\mathbb{Q})$ samt alle dellegemer af M_1, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er 2.

2) Vis, at M_2 er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ indeholdende $\mathbb{Q}(i)$ og bevis, at polynomiet $X^4 + 3$ er irreducibelt over $\mathbb{Q}(i)$

3) Bestem dimensionen $[M_2 : \mathbb{Q}]$ og Galoisgruppen $Gr(M_2/\mathbb{Q})$.

4) Bestem alle dellegemer af M_2, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er 2.

5) Angiv dimensionen over $\mathbb{Q}$ for $M_1 \cap M_2$, og bestem dimensionen over $\mathbb{Q}$ for kompositet M_1M_2.

6) Bestem alle dellegemer af kompositet M_1M_2, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er 2, og angiv Galoisgruppen $Gr(M_1M_2/\mathbb{Q})$.

Opgave 3 fortsættes på side 2

7) Angiv det mindste naturlige tal t for hvilket der findes et (ikke nødvendigvis irreducibelt) t-te gradspolynomium i $\mathbb{Q}[X]$, hvis spaltningslegeme over $\mathbb{Q}$ er M_1M_2.

8) Angiv det mindste naturlige tal u for hvilket der findes et irreducibelt u-te gradspolynomium i $\mathbb{Q}[X]$ hvis spaltningslegeme over $\mathbb{Q}$ er M_1M_2.

Opgave 4 (Vægt 20 %)

1) Vis, at polynomiet $f(X) = X^5 - 10X^4 + 2$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle rødder til $f(X)$.

2) Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem $Gr(M/\mathbb{Q})$. Vis, at polynomiet $f(X)$ ikke er opløseligt ved rodtegn.

3) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 2 med en rod i M.

4) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 4 med en rod i M.

5) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 8 med en rod i M.