Kbenhavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1997

3 AL ny ordning

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Ingen hjlpemidler
Sttet er p 2 sider og bestr af 4 opgaver.
Til en fuldstndig besvarelse krves 100%

Opgave 1 (Vgt 25 %)

Der nskes en redegrelse for hovedpunkterne i beviserne for Sylows gruppestninger.

Undersg, om enhver gruppe af orden 600 er oplselig.

Undersg, om enhver gruppe af orden 1000 er oplselig.

Opgave 2 (Vgt 25 %)

Formuler den kvadratiske reciprocitetsstning samt frste og andet supplement til denne.

Der nskes en redegrelse for beviset for den kvadratiske reciprocitetsstning. (Frste og andet supplement nskes ikke bevist.)

Undersg, om 41 er kvadratisk rest modulo 67.

Lad n vre et helt positivt tal. Undersg, om det for enhver primdivisor p i $1+12n^2$ glder, at $p \equiv 1 \pmod 6$.

Opgave 3 (Vgt 30 %)

Lad $\mathbb{Q}_8$ vre det ottende cirkeldelingslegeme $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/8})$.

1) Angiv Galoisgruppen $Gr(\mathbb{Q}_8/\mathbb{Q})$ og angiv samtlige dellegemer af $\mathbb{Q}_8$.

Lad M vre spaltningslegemet for X^8-2 over $\mathbb{Q}$.

2) Vis, at M er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ indeholdende $\mathbb{Q}_8$ og bestem dimensionen $[M:\mathbb{Q}]$.

3) Angiv Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q}_8)$ og bestem alle dellegemer af M, der indeholder $\mathbb{Q}_8$.

Lad N vre spaltningslegemet for X^8-3 over $\mathbb{Q}$.

4) Vis, at N er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ indeholdende $\mathbb{Q}_8$ og godtgr, at X^8-3 er irreducibelt i $\mathbb{Q}_8[X]$.

5) Bestem dimensionen $[N:\mathbb{Q}]$.

6) Angiv Galoisgruppen $Gr(N/\mathbb{Q}_8)$ og bestem alle dellegemer af N, der indeholder $\mathbb{Q}_8$.

7) Angiv $M \cap N$ og bestem dimensionen $[MN:\mathbb{Q}]$.

Opgavesttet fortsttes p side 2

Opgave 4 (Vgt 20 %)

1) Vis, at $f(X) = X^5 - 8X + 2$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle rddder til $f(X)$.

2) Lad M vre spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem $Gr(M/\mathbb{Q})$. Vis, at $f(X)$ ikke er oplseligt ved rodtegn.

4) Undersg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 3 med en rod i M.

5) Undersg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 4 med en rod i M.

6) Undersg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 12 med en rod i M.