Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1997

3 AL gammel ordning.

Opgaver til besvarelse i 3 timer.
Ingen hjælpemidler.
Sættet er på én side og består af 3 opgaver.
Til en fuldstændig besvarelse kræves 100%.

Opgave 1 (Vægt 33 %)

Der ønskes en redegørelse for hovedpunkterne i beviserne for Sylows gruppesætninger.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 600 er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 1000 er opløselig.

Opgave 2 (Vægt 40 %)

Lad $\mathbb{Q}_8$ være det ottende cirkeldelingslegeme $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/8})$.

1) Angiv Galoisgruppen $Gr(\mathbb{Q}_8/\mathbb{Q})$ og angiv samtlige dellegemer af $\mathbb{Q}_8$.

Lad M være spaltningslegemet for X^8-2 over $\mathbb{Q}$.

2) Vis, at M er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ indeholdende $\mathbb{Q}_8$ og bestem dimensionen $[M:\mathbb{Q}]$.

3) Angiv Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q}_8)$ og bestem alle dellegemer af M, der indeholder $\mathbb{Q}_8$.

Lad N være spaltningslegemet for X^8-3 over $\mathbb{Q}$.

4) Vis, at N er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ indeholdende $\mathbb{Q}_8$ og godtgør, at X^8-3 er irreducibelt i $\mathbb{Q}_8[X]$.

5) Bestem dimensionen $[N:\mathbb{Q}]$.

6) Angiv Galoisgruppen $Gr(N/\mathbb{Q}_8)$ og bestem alle dellegemer af N, der indeholder $\mathbb{Q}_8$.

7) Angiv $M\cap N$ og bestem dimensionen $[MN:\mathbb{Q}]$.

Opgave 3 (Vægt 27 %)

1) Vis, at $f(X)=X^5-8X+2$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle røddder til $f(X)$.

2) Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem $Gr(M/\mathbb{Q})$. Vis, at $f(X)$ ikke er opløseligt ved rodtegn.

4) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 3 med en rod i M.

5) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 4 med en rod i M.

6) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 12 med en rod i M.