Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1996-97

Matematik 3 AL ny ordning

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler.

(De følgende 4 opgaver har samme vægt.)

Opgave 1

Der ønskes en redegørelse for beviset for, at en endelig gruppe er opløselig såfremt alle Sylowgrupperne er cykliske. (Den her benyttede sætning af Burnside ønskes citeret men ikke bevist.)

Undersøg, om enhver gruppe af orden $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ er opløselig.

Opgave 2

Der ønskes en redegørelse for beviset for den kvadratiske reciprocitetssætning .

Undersøg, om 31 er kvadratisk rest modulo 37.

Undersøg, om 11 er kvadratisk rest modulo ethvert primtal p, for hvilket $p \equiv 1 \pmod{44}$.

Undersøg, om 11 er kvadratisk rest modulo ethvert primtal p, for hvilket $p \equiv 1 \pmod{22}$.

Opgave 3

Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $X^4 - 2$ og N spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $X^4 - 3$.

1) Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er normal og bestem Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q})$. Angiv kommutatorgruppen for $Gr(M/\mathbb{Q})$.

2) Vis, at $\mathbb{Q}(i) \subset M$ og bestem alle dellegemer af M, der indeholder $\mathbb{Q}(i)$.

3) Vis, at N/Q er normal og bestem Galoisgruppen $Gr(N/\mathbb{Q})$. Angiv kommutatorgruppen for $Gr(N/\mathbb{Q})$.

4) Vis, at $\mathbb{Q}(i) \subset N$ og bestem alle dellegemer af N, der indeholder $\mathbb{Q}(i)$.

5) Vis, at kompositet MN er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ og bestem dimensionen $[MN : \mathbb{Q}]$.

6) Undersøg, om kommutatorgruppen for $Gr(MN/\mathbb{Q})$ er abelsk.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4

1) Vis, at $f(X) = X^5 - 10X + 5$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle røddder til $f(X)$.

2) Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem $Gr(M/\mathbb{Q})$.

3) Angiv de naturlige tal t for hvilke der findes et over $\mathbb{Q}$ normalt dellegeme af M, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er lig t.

4) Bestem dimensionen $[(M \cap \mathbb{R}) : \mathbb{Q}]$, hvor $\mathbb{R}$ betegner de reelle tals legeme.

5) Vis, at $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) \subset M$, hvor D betegner diskriminanten for $f(X)$ og bestem $Gr(M/\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$.

(Diskriminanten D forlanges ikke udregnet.)

6) Bestem fortegnet for D.