Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1996-97

Matematik 3 AL gammel ordning

Opgaver til besvarelse i 3 timer.
Ingen hjælpemidler.

Opgave 1 (Vægt 36%)

Der ønskes en redegørelse for beviserne for Sylows gruppesætninger.
Undersøg, om enhver gruppe af orden 1200 er opløselig.
Undersøg, om enhver gruppe af orden 1300 er opløselig.
Undersøg, om enhver gruppe af orden $11 \cdot 4 \cdot 5$ er opløselig.

Opgave 2 (Vægt 32%)

Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $X^4 - 2$ og N spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $X^4 - 3$.
1) Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er normal og bestem Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q})$.
Angiv kommutatorgruppen for $Gr(M/\mathbb{Q})$.
2) Vis, at $\mathbb{Q}(i) \subset M$ og bestem alle dellegemer af M, der indeholder $\mathbb{Q}(i)$.
3) Vis, at N/Q er normal og bestem Galoisgruppen $Gr(N/\mathbb{Q})$. Angiv kommutatorgruppen for $Gr(N/\mathbb{Q})$.
4) Vis, at $\mathbb{Q}(i) \subset N$ og bestem alle dellegemer af N, der indeholder $\mathbb{Q}(i)$.
5) Vis, at kompositet MN er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ og bestem dimensionen $[MN : \mathbb{Q}]$.
6) Undersøg, om kommutatorgruppen $Gr(MN/\mathbb{Q})$ er abelsk.

Opgave 3 (Vægt 32%)

1) Vis, at $f(X) = X^5 - 10X + 5$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle røddder til $f(X)$.
2) Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem $Gr(M/\mathbb{Q})$.
3) Angiv de naturlige tal t for hvilke der findes et over $\mathbb{Q}$ normalt dellegeme af M, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er lig t.
4) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 4 med en rod i M.
5) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 8 med en rod i M.
6) Undersøg, om der findes et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[X]$ af grad 15 med en rod i M.