Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1995-96

Matematik 3 AL

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Ingen hjælpemidler.

Til en fuldstændig besvarelse kræves 100 points.

Opgave 1 (35 points)

Der ønskes en redegørelse for beviset for Abel-Steinitz's sætning i det tilfælde, hvor grundlegemet har uendelig mange elementer.

Lad M/K være en endelig normal udvidelse og α et element i M. Vis, at $M = K(\alpha)$ hvis og kun hvis $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ for enhver automorfi σ i Galoisgruppen $Gr(M/K)$ forskellig fra identiteten.

Opgave 2 (10 points)

Angiv antallet af ikke-isomorfe grupper af orden n, når n = 8,14,25 og 35.
Undersøg, om enhver gruppe af orden 200 er opløselig.
Undersøg, om enhver gruppe af orden 240 er opløselig.
Angiv centret for en ikke-abelsk gruppe af orden 21.

Opgave 3 (30 points)

Lad $f(X) = X^5 - 25X + 5$ og lad M være spaltningslegemet for dette polynomium over de rationale tals legeme $\mathbf{Q}$.

1) Vis, at $f(X)$ er irreducibelt i $\mathbf{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle rødder.
2) Vis, at $M/\mathbf{Q}$ er normal og bestem Galoisgruppen $Gr(M/K)$.
3) Undersøg, om $f(X)$ er opløseligt ved rodtegn.
4) Undersøg, om der findes et i $\mathbf{Q}[X]$ irreducibelt polynomium af grad 4, som har en rod i M.
5) Undersøg, om der findes et i $\mathbf{Q}[X]$ irreducibelt polynomium af grad 10, som har en rod i M.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (30 points)

Lad N være spaltningslegemet over $\mathbf{Q}$ for polynomiet $X^4 - 5$.

1) Vis, at $N/\mathbf{Q}$ er normal og angiv Galoisgruppen $Gr(N/\mathbf{Q})$.
2) Bestem de dellegemer af N hvis dimension over $\mathbf{Q}$ er 2.
3) Vis, at polynomiet $X^4 + 5$ er irreducibelt over $\mathbf{Q}(i)$.

Lad K være spaltningslegemet over $\mathbf{Q}$ for polynomiet $X^4 + 5$.

4) Vis, at $K/\mathbf{Q}$ er normal og bestem Galoisgruppen $Gr(K/\mathbf{Q})$.
5) Bestem de dellegemer af K, hvis dimension over $\mathbf{Q}$ er 2.
6) Bestem spaltningslegemet over $\mathbf{Q}$ for polynomiet $X^8 - 25$ og Galoisgruppen over $\mathbf{Q}$ for dette spaltningslegeme.