Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1994-95

Matematik 3 AL

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Ingen hjælpemidler.

Til en fuldstændig besvarelse kræves 100 points.

Opgave 1 (35 points)

Der ønskes en redegørelse for Sylows gruppesætninger og hovedpunkterne i beviserne for disse.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 140 er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 130 er opløselig.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 120 er opløselig.

Opgave 2 (25 points)

Lad $f(X) = X^5 - 10X + 5$ og lad M være spaltningslegemet for $f(X)$ over $\mathbf{Q}$.

1) Vis, at $f(X)$ er irreducibelt i $\mathbf{Q}[X]$ og angiv antallet af reelle rødder.
2) Vis, at $M/\mathbf{Q}$ er normal og bestem Galoisgruppen $Gr(M/\mathbf{Q})$.
3) Undersøg, om $f(X)$ er opløseligt ved rodtegn.
4) Undersøg, om der findes et i $\mathbf{Q}[X]$ irreducibelt andensgradspolynomium, som har en rod i M.
5) Undersøg, om der findes et i $\mathbf{Q}[X]$ irreducibelt trediegradspolynomium, som har en rod i M.

Opgave 3 (25 points)

Lad N være spaltningslegemet over $\mathbf{Q}$ for $X^4 - 3$.

1) Vis, at $N/\mathbf{Q}$ er normal og angiv Galoisgruppen $Gr(N/\mathbf{Q})$.
2) Bestem alle dellegemer L af N for hvilke $[L : \mathbf{Q}] = 2$.

Lad K være spaltningslegemet over $\mathbf{Q}$ for polynomiet $X^4 - 4X^2 + 2$.

3) Vis, at $K/\mathbb{Q}$ er normal og bestem Galoisgruppen $Gr(K/Q)$.
4) Vis, at $K \cap N = \mathbf{Q}$ og bestem herved Galoisgruppen over $\mathbf{Q}$ for kompositet KN.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (25 points)

Lad $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}(e^{2\pi i/n})$ betegne det n-te cirkeldelingslegeme.

1) Angiv Galoisgruppen $Gr(\mathbf{Q}_{11}/\mathbf{Q})$. Vis, at der findes et i $\mathbf{Q}[X]$ irreducibelt femtegradspolynomium $f(X)$ med 5 reelle rødder, for hvilket Galoisgruppen for spaltningslegemet over $\mathbf{Q}$ er cyklisk af orden 5. (Et sådant polynomium forlanges ikke angivet eksplicit.)
2) Vis, at der findes netop ét dellegeme af $\mathbf{Q}_{11}$, hvis dimension over $\mathbf{Q}$ er 2.
3) Angiv det mindste tal t for hvilket der findes et (ikke nødvendigvis irreducibelt) polynomium i $\mathbf{Q}[X]$ af grad t med $\mathbf{Q}_{11}$ som spaltningslegeme.
4) Bestem Galoisgruppen $Gr(\mathbf{Q}_{17}/\mathbf{Q})$ og angiv det mindste tal u for hvilket der findes et (ikke nødvendigvis irreducibelt) polynomium i $\mathbf{Q}[X]$ af grad u med $\mathbf{Q}_{17}$ som spaltningslegeme.

Opgavesættet slut.