Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet Sommeren 1991

Matematik 3 AL

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Ingen hjælpemidler.

Til en fuldstændig besvarelse kræves 100%.

Opgave 1 (Vægt 35%)

Der ønskes en redegørelse for beviserne i Sylows gruppesætninger.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 84 er opløselig.

Opgave 2 (Vægt 25%)

Lad M være spaltningslegemet over Q for polynomiet

$$f(X) = X^5 - 12X + 3 \ .$$

1) Vis, at polynomiet $f(X)$ er irreducibelt over Q og angiv antallet af reelle rødder.
2) Bestem Galoisgruppen $Gr(M/Q)$ og undersøg, om $f(X)$ er opløseligt ved rodtegn.
3) Angiv ordnerne af de normale undergrupper i $Gr(M/Q)$. Vis, at intet i $Q[X]$ irreducibelt 4^{de} gradspolynomium har nogen rod i M.

Opgave 3 (Vægt 40%)

Lad M være spaltningslegemet over Q for polynomiet

$$f(X) = X^8 - 2X^4 - 1$$

og lad ε betegne den primitive 8^{de} enhedsrod $e^{\frac{2\pi i}{8}}$.

1) Vis, at $f(X)$ er irreducibelt over Q. [Betragt $f(X+1)$.]
2) Vis, at $M = Q(\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}, i)$. (Benyt, at α er rod i $f(X)$ hvis og kun hvis ε/α er rod i $f(X)$.) Bestem $[M : Q]$.
3) Vis, at $Gr(M/Q)$ er en opløselig gruppe og undersøg, om den er abelsk.

Opgave 3 fortsættes på side 2

4) Lad β være roden $\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}$ i $f(X)$. Vis, at der findes en entydig bestemt automorfi σ i $Gr(M/Q)$ for hvilken $\sigma(\beta) = \varepsilon/\beta$ og $\sigma(i) = -i$. Angiv ordenen af σ og bestem fixpunktlegemet $F(\sigma)$.
5) Vis, at $M/Q(i\sqrt{2}\,)$ er normal og find $Gr(M/Q(i\sqrt{2}\,))$.
6) Vis, at $M/Q(\sqrt{2}\,)$ er normal og find $Gr(M/Q(\sqrt{2}\,))$.