Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet Sommer 1990

Matematik 3 AL

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Ingen hjælpemidler.

Opgave 1 (Vægt 40%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for hovedsætningen vedrørende opløselighed ved rodtegn af et irreducibelt polynomium.

(Hilberts sætning 90 og sætningen om indlejring af en radikaludvidelse i en endelig normal metaabelsk udvidelse forlanges ikke bevist.)

Angiv et irreducibelt 5-te gradspolynomium i $Q[X]$, der ikke kan opløses ved rodtegn. (Den til konstruktion af et sådant polynomium tilgrundliggende sætning ønskes citeret, men ikke bevist.)

Opgave 2 (Vægt 35%)

1) Lad M være spaltningslegemet over Q for polynomiet $X^{11} - 2$. Vis, at M/Q er en normal udvidelse og bestem $[M : Q]$.
2) Vis, at $G = Gr(M/Q)$ er opløselig. Er G abelsk?
3) Bestem kommutatorgruppen G' og bestem det mindste naturlige tal n for hvilket den n-te afledede gruppe $G^{(n)} = 1$.
4) Vis, at G indeholder netop én normaldeler N af orden 11 og at enhver normaldeler i G af orden > 1 indeholder N.
5) Angiv antallet af dellegemer af M, hvis dimension over Q er 2.
6) Angiv antallet af dellegemer af M, hvis dimension over Q er 5.

Opgave 3 (Vægt 25%)

Lad M_i være spaltningslegemet over Q for polynomiet $f_i(X)$, $1 \le i \le 4$, hvor

$$f_1(X) = X^4 - 10X^2 + 5\,,\; f_2(X) = X^4 - 10X^2 - 5\,,\; f_3(X) = X^4 + 1\,,\; f_4(X) = X^6 + 3\,.$$

Vis, at M_i/Q er normal og angiv $Gr(M_i/Q)$ for $i = 1, 2, 3$ og 4.