Mat 3 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Ingen hjælpemidler.

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, sålænge skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

Opgave 1 (Vægt 30%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for, at en endelig gruppe er opløselig, såfremt alle Sylowgrupperne er cykliske. (Den benyttede sætning af Burnside ønskes citeret, men ikke bevist.)

Undersøg, om en gruppe af orden 120 er opløselig, såfremt den indeholder et element af orden 4.

Undersøg, om en gruppe af orden 120 er opløselig, såfremt den indeholder et element af orden 8.

Opgave 2 (Vægt 12 %)

Der ønskes givet et bevis for sætningen, som siger, at der til enhver primtalspotens q findes ét og pånær isomorfi kun ét legeme med q elementer.

Lad K være legemet med 3 elementer. Undersøg, om polynomiet $x^4 - x^2 + x$ går op i polynomiet $x^{27} - x$ inden for $K[x]$.

Opgave 3 (Vægt 33 %)

For et naturligt tal n betegner $\mathbb{Q}_n$ det n-te cirkeldelingslegeme $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$.

1) Angiv Galoisgruppen $Gr(\mathbb{Q}_8/\mathbb{Q})$. Find samtlige dellegemer af $\mathbb{Q}_8$.

   Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $x^8 - 2$.
2) Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse. Bestem $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}) \cap \mathbb{Q}_8$ og dimensionen $[M : \mathbb{Q}]$.
3) Undersøg, om $Gr(M/\mathbb{Q})$ er abelsk og om $Gr(M/\mathbb{Q})$ er opløselig.

   Lad N være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $x^8 + 2$.
4) Vis, at $N/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og undersøg, om $Gr(N/\mathbb{Q})$ er abelsk og om $Gr(N/\mathbb{Q})$ er opløselig.

Opgave 3 fortsættes på side 2

5) Find en faktorisering af $x^8 + 2$ i to fjerdegradspolynomier i $\mathbb{Q}_8[x]$ og vis, at disse er irreducible i $\mathbb{Q}_8[x]$.
6) Bestem dimensionen $[N : \mathbb{Q}]$.
7) Bestem dimensionen $[MN : \mathbb{Q}]$, hvor MN er kompositet af M og N. (Vis f.eks. at MN er en udvidelse af $\mathbb{Q}_{16}$.)
8) Vis, at fællesmængden $M \cap N$ er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ og bestem Galoisgruppen $Gr(M \cap N)/\mathbb{Q}$.

Opgave 4 (Vægt 25%)

1) Vis, at polynomiet $f(x) = x^5 - 10x + 2$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ og angiv antallet af reelle rødder i $f(x)$.
2) Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $f(x)$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er normal og bestem Galoisgruppen. Er $f(x)$ opløselig ved rodtegn?
3) Undersøg, om der findes et i $\mathbb{Q}[x]$ irreducibelt trediegradspolynomium, som har en rod i M.
4) Undersøg, om der findes et i $\mathbb{Q}[x]$ irreducibelt fjerdegradspolynomium, som har en rod i M.
5) Undersøg, om der findes et ved rodtegn opløseligt irreducibelt femtegradspolynomium i $\mathbb{Q}[x]$, som har en rod i M.
6) Undersøg, om der findes et ved rodtegn opløseligt irreducibelt femtegradspolynomium i $\mathbb{Q}[x]$, som er reducibelt betragtet som polynomium i $M[x]$.