Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 2001

Matematik 3AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler.

Opgave 1 (Vægt 25%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for, at en endelig gruppe er opløselig, såfremt alle Sylowgrupperne er cykliske. (Den her benyttede sætning af Burnside ønskes citeret men ikke bevist.)

Undersøg, om enhver gruppe af orden $5 \cdot 17 \cdot 19$ er opløselig.
Undersøg, om enhver gruppe af orden $5 \cdot 17 \cdot 19$ er cyklisk.

Undersøg, om enhver gruppe af orden 45 er abelsk.

Opgave 2 (Vægt 20%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for den kvadratiske reciprocitetssætning.

Undersøg, om 21 er kvadratisk rest modulo 41.

Undersøg, om 15 er kvadratisk rest modulo 43.

Opgave 3 (Vægt 30%)

1) Vis, at polynomiet $f(x) = x^4 - 8x^2 + 17$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}$. (Betragt f.eks. $f(x+1)$.)

Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $f(x)$.

2) Vis, at M indeholder netop tre dellegemer, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er 2, og angiv disse.
3) Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er normal og angiv Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q})$.
4) Angiv samtlige dellegemer af M.

Opgave 4 (Vægt 25%)

1) Vis, at polynomiet $f(x) = x^5 - 5x + 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$. (Betragt f.eks. $f(x-1)$.) Angiv antallet af reelle rødddder i $f(x)$.
2) Lad M være spaltningslegemet for $f(x)$ over $\mathbb{Q}$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem $Gr(M/\mathbb{Q})$. Er $f(x)$ opløselig ved rodtegn?

Opgave 4 fortsættes på side 2

Det oplyses (og kan uden bevis benyttes), at diskriminanten for $f(x)$ er $-3 \cdot 5^6 \cdot 17$.

3) Vis, at $\mathbb{Q}(\sqrt{-51})$ er indeholdt i M og undersøg, om $f(x)$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}(\sqrt{-51})[X]$.
4) Bestem Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q}(\sqrt{-51}))$.
5) Undersøg, om der findes et irreducibelt fjerdegradspolynomium i $\mathbb{Q}(\sqrt{-51})[X]$, der har en rod i M.