Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 2000-2001

Matematik 3AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler.

Opgave 1 (Vægt 20%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for, at det n^{te} cirkeldelingspolynomium $F_n(x)$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$. (Det kan benyttes, at $F_n(x)$ har heltallige koefficienter.)

Angiv $F_n(x)$ for $n = 4, 5$ og 8.

Opgave 2 (Vægt 15%)

Giv et bevis for, at der til en primtalspotens q findes ét og pånær isomorfi kun ét legeme med q elementer.

Lad $\mathbb{F}_3$ betegne legemet med 3 elementer. Undersøg, om polynomiet $x^4 - x^3 + x$ inden for $\mathbb{F}_3[X]$ går op i polynomiet $x^{27} - x$.

Opgave 3 (Vægt 5%)

Formuler (uden bevis) den kvadratiske reciprocitetssætning samt første og andet supplement til denne.

Undersøg, om 34 er kvadratisk rest modulo 233.

Opgave 4 (Vægt 30%)

1) Vis, at polynomierne $f_1(x) = x^4 - 2$ og $f_2(x) = x^5 - 2$ er irreducible i $\mathbb{Q}[X]$.

For $i = 1, 2$, lad M_i være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $f_i(x)$.

2) Vis, at M_1 og M_2 er normale udvidelser af $\mathbb{Q}$ og bestem dimensionerne $[M_1 : \mathbb{Q}]$ og $[M_2 : \mathbb{Q}]$ samt Galoisgruppen $G_1 = Gr(M_1/\mathbb{Q})$.

3) Angiv samtlige dellegemer af M_1, der har dimension 2 over $\mathbb{Q}$.

4) Vis, at Galoisgruppen $G_2 = Gr(M_2/\mathbb{Q})$ indeholder netop én undergruppe N hvis orden er 5. Vis, at N er normaldeler i G_2 og bestem faktorgruppen G_2/N.

5) Angiv kommutatorgruppen for G_2 og bestem det mindste naturlige tal j for hvilket den j^{te} afledede gruppe $G_2^{(j)}$ er lig $\{e\}$.

Opgave 4 fortsættes på side 2

6) Vis, at M_2 indeholder netop ét dellegeme L, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er lig 2, og bestem L. (Man kan eventuelt benytte, at $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$.)

7) Bestem fællesmængden $M_1 \cap M_2$ og angiv dimensionen af kompositet $M_1 M_2$ over $\mathbb{Q}$.

Opgave 5 (Vægt 30%)

1) Vis, at polynomierne $f_1(x) = x^5 - 10x + 5$ og $f_2(x) = x^5 - 8x + 2$ er irreducible i $\mathbb{Q}[X]$ og bestem for hvert af disse polynomier antallet af reelle rødder.

2) For $i = 1, 2$, lad M_i være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for $f_i(x)$. Vis, at $M_1/\mathbb{Q}$ og $M_2/\mathbb{Q}$ er normale udvidelser og bestem Galoisgrupperne $Gr(M_1/\mathbb{Q})$ og $Gr(M_2/\mathbb{Q})$. Undersøg, om $f_1(x)$ og $f_2(x)$ er opløselige ved rodtegn.

Det oplyses (og kan uden bevis benyttes), at diskriminanten for $f_1(x)$ er $-5^5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 47$ og diskriminanten for $f_2(x)$ er $-2^4 \cdot 3^2 \cdot 79 \cdot 733$.

3) Bestem fællesmængden $M_1 \cap M_2$ og Galoisgruppen $Gr(M_1 M_2/\mathbb{Q})$ for kompositet $M_1 M_2$.

4) Undersøg, om der findes et irreducibelt fjerdegradspolynomium i $\mathbb{Q}[X]$, der har en rod i M_1.

5) Undersøg, om der findes et irreducibelt fjerdegradspolynomium i $\mathbb{Q}[X]$, der har en rod i $M_1 M_2$.

6) Undersøg, om der findes et irreducibelt trediegradspolynomium i $\mathbb{Q}[X]$, der har en rod i M_1 og om der findes et irreducibelt trediegradspolynomium i $\mathbb{Q}[X]$, der har en rod i $M_1 M_2$.