Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2000

Matematik 3AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler.

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (Vægt 25%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for, at en endelig gruppe er opløselig, såfremt alle Sylowgrupperne er cykliske. (Der benyttes en sætning af Burnside, som ønskes citeret men ikke bevist.)

Undersøg, om enhver gruppe af orden $5 \cdot 7 \cdot 19$ er opløselig.

Undersøg, om kommutatorgruppen af enhver gruppe af orden $5 \cdot 7 \cdot 19$ er cyklisk.

Opgave 2 (Vægt 20%)

Der ønskes en redegørelse for beviset for den kvadratiske reciprocitetssætning.

Undersøg, om 27 er kvadratisk rest modulo 41.

Undersøg, om 17 er kvadratisk rest modulo 73.

Opgave 3 (Vægt 30%)

1) Lad L være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$ for polynomiet $x^4 - 2$. Vis, at $L/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem Galoisgruppen $Gr(L/\mathbb{Q})$. Bestem samtlige dellegemer af L, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er 2.

2) Lad M være spaltningslegemet for $x^4 - 10x^2 + 20$ over $\mathbb{Q}$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem Galoisgruppen $Gr(M/\mathbb{Q})$. Bestem samtlige dellegemer af M, hvis dimension over $\mathbb{Q}$ er 2.

3) Bestem fællesmængden $L \cap M$. Vis, at kompositet LM er en normal udvidelse af $\mathbb{Q}$ og angiv Galoisgruppen $Gr(LM/\mathbb{Q})$.

4) Undersøg, om Galoisgruppen $Gr(LM/\mathbb{Q})$ er abelsk. Undersøg, om Galoisgruppen $Gr(LM/\mathbb{Q})$ er opløselig.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (Vægt 25%)

1) Vis, at polynomiet $f(x) = x^5 - 5x + 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$. (Vink: Betragt f.eks. $f(x-1)$.) Angiv antallet af reelle rødder til $f(X)$.

2) Lad M være spaltningslegemet over $\mathbb{Q}$. Vis, at $M/\mathbb{Q}$ er en normal udvidelse og bestem $Gr(M/\mathbb{Q})$. Er $f(x)$ opløselig ved rodtegn?

3) Undersøg, om der findes et naturligt tal n, så $f(x)$ er en divisor i polynomiet $x^n - 1$.

4) Undersøg, om der findes et naturligt tal t, så $f(x)$ er en divisor i polynomiet $x^{4t} - 5x^t + 1$.