Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1999

MATEMATIK 3AG

3 timers skriftlig prøve

I den første halvdel (90 minutter) er hjælpemidler ikke tilladte. I den sidste halvdel er alle sædvanlige hjælpemidler tilladte.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 90 minutter. Hvad der derefter besvares af opgave 1, medregnes ikke ved bedømmelsen.

Der er 4 opgaver:

Opgave 1 er en stilopgave, der tæller 50%.

Opgave 2, 3 og 4 er problemopgaver, der tæller henholdsvis 15%, 15% og 20%.

Der kan altså opnås i alt 100%.

Opgave 1 (50%).

Multipliciteter og tangenter.

Lad $C = (h)$ være en projektiv kurve, og lad $L = (\ell)$ være en projektiv linie.

(a) Angiv definitionen af multipliciteten af C i begyndelsespunktet O, og angiv definitionen af multipliciteten af L som tangent til C i O. Hvis definitionerne gives ved henvisning til tilsvarende definitioner for affine kurver, ønskes disse affine definitioner også angivet.

Angiv et resultat, der giver den præcise sammenhæng mellem multipliciteten af C i O og antallet af tangenter til C i O.

(b) Lad nu $\alpha\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ være et projektivt koordinatskift med $\alpha(O) = O$.

Formulér et resultat, der sammenligner multipliciteterne i O af kurverne C og C_α.

Formulér et resultat, der sammenligner multipliciteterne af linierne L og L_α som tangenter til henholdsvis kurverne C og C_α i O.

Bevis begge disse resultater. Uden yderligere kommentarer kan anvendes, at et sådant koordinatskift er induceret af en isomorfi $\psi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ af formen

$$(*) \qquad \psi(\underline{x}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_3).$$

(c) Lad nu P være et vilkårligt punkt i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Formulér et resultat, der muliggør definition af multipliciteten af C i P, og et resultat, der muliggør definition af multipliciteten af L som tangent til C i P.

Angiv disse definitioner.

Bevis ovennævnte resultat.

(d) Antag nu, at $\alpha\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ er et vilkårligt projektivt koordinatskift.

Formulér et resultat, der sammenligner multipliciteten af C i punktet P med multipliciteten af C_α i $\alpha(P)$.

Formulér et resultat, der sammenligner multipliciteten af L som tangent til C i P med multipliciteten af L_α som tangent til C_α i $\alpha(P)$.

Bevis det sidste af disse resultater.

Opgavesættet fortsættes på bagsiden

Opgave 2 (15%).

I denne opgave er R et ikke-trivielt, kommutativt og noethersk integritetsområde.

(a) Bevis, at hvis R er DVR og a og b er elementer i R, så gælder $a \in Rb$ eller $b \in Ra$.

(b) Bevis, at hvis mængden af idealer i R er totalt ordnet[1] under inklusion, så er R lokal, og maksimalidealet i R er et hovedideal. [Vink: Begrund, at maksimalidealet er frembragt af endeligt mange elementer a_i, og benyt, at hovedidealerne frembragt af a_i'erne er totalt ordnede under inklusion.]

(c) Bevis, at R er DVR hvis og kun hvis mængden af idealer i R er totalt ordnet under inklusion.

Opgave 3 (15%).

Lad $h, k \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ være to ikke-konstante homogene polynomier, og betragt de projektive kurver $C \stackrel{\text{def}}{=} (h)$, $D \stackrel{\text{def}}{=} (k)$ og $E \stackrel{\text{def}}{=} (hk)$.

(a) Bevis, at

$$\mathrm{m}_O(E) = \mathrm{m}_O(C) + \mathrm{m}_O(D).$$

(b) Bevis, at hvis C og D er kvadrikker uden fælles tangent i O, så er

$$\mathrm{m}_O(E) \geq \mathrm{m}_O(C \bullet D).$$

[Vink: Vis og benyt, at $rs \leq r + s$ når $0 \leq r \leq s \leq 2$.]

(c) Bevis, at hvis kurverne C og D begge går gennem begyndelsespunktet O, og O ikke er regulært på nogen af kurverne, så er

$$\mathrm{m}_O(E) \leq \mathrm{m}_O(C \bullet D).$$

Opgave 4 (20%).

Betragt polynomierne $f \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2$ og $g \stackrel{\text{def}}{=} x_1^3 - x_2^2$, de affine punkter $P \stackrel{\text{def}}{=} (1, 1)$, $Q \stackrel{\text{def}}{=} (1, -1)$, $R \stackrel{\text{def}}{=} (-2, \sqrt{-8})$ og $S \stackrel{\text{def}}{=} (-2, -\sqrt{-8})$, og de projektive kurver $C \stackrel{\text{def}}{=} (f^*)$ og $D \stackrel{\text{def}}{=} (g^*)$.

(a) Illustrér C og D.

(b) Begrund, at begyndelsespunktet O ikke er regulært på D, og at O er det eneste ikke-regulære punkt på D.

(c) Bestem $C \bullet D$.

(d) Begrund, at en linie gennem O højst har to skæringspunkter med D, og angiv en linie der kun skærer D i ét punkt.

[1] Dvs. for vilkårlige to idealer $\mathcal{I}$ og $\mathcal{J}$ i R gælder $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ eller $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$.