Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1998

MATEMATIK 3AG

3 timers skriftlig prøve

I den første halvdel (90 minutter) er hjælpemidler ikke tilladt. I den sidste halvdel er alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 90 minutter. Hvad der derefter besvares af opgave 1, medregnes ikke ved bedømmelsen.

Der er 4 opgaver:

Opgave 1 er en stilopgave, der tæller 50%.

Opgave 2, 3 og 4 er problemopgaver, der tæller henholdsvis 15%, 20% og 15%.

Der kan altså opnås i alt 100%.

Opgave 1 (50%).

Noetherske ringe.

(a) Angiv definitionen af begrebet "noethersk ring".

(b) Angiv og bevis et interessant resultat, der beskriver en noethersk ring ved egenskaber ved mængden af idealer i ringen ordnet ved inklusion. De enkelte dele af beviset bør fremstå klart.

(c) Formulér og bevis Hilbert's Basissætning. De enkelte dele af beviset bør fremstå klart.

Opgave 2 (15%).

Lad M være en modul over en kommutativ ring R, lad H, H' og K være undermoduler af M, og antag $H' \subseteq H$.

(a) Bevis, at $H \cap (H' + K) = H' + H \cap K$.

(b) Bestem R–homomorfier ι og π, så der er en exakt følge

$$0 \to (H' + H \cap K) \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} (H + K)/(H' + K) \to 0\,.$$

Antag nu, at R er en $\mathbb{C}$–algebra, og at vektorrumsdimensionen $\dim M$ er endelig.

(c) Bevis formlen

$$\dim(H + K) - \dim(H' + K) = \dim H - \dim(H' + H \cap K)\,.$$

Opgavesættet fortsættes på næste side

Opgave 3 (20%).

Betragt polynomierne $f \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 - 1$, $g \stackrel{\text{def}}{=} x_2 - x_1^2 + 1$ og $h \stackrel{\text{def}}{=} x_2 + x_1^2 - 1$, de affine punkter $P \stackrel{\text{def}}{=} (1,0)$, $Q \stackrel{\text{def}}{=} (0,1)$, $R \stackrel{\text{def}}{=} (-1,0)$ og $S \stackrel{\text{def}}{=} (0,-1)$ og de projektive kurver $C \stackrel{\text{def}}{=} (f^*)$ og $D \stackrel{\text{def}}{=} (g^*h^*)$.

(a) Illustrér C og D.

(b) Begrund, at $\mathrm{m}_P(C \bullet D) \geq 2$ og $\mathrm{m}_Q(C \bullet D) \geq 2$.

(c) Bestem $C \bullet D$.

Isomorfien $\underline{\varphi}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ er defineret ved $\underline{\varphi}(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_3, x_2)$ for $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$. Lad $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\underline{\varphi}}\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ være det inducerede projektive koordinatskift.

(d) Bestem $C_\alpha \bullet D_\alpha$.

Opgave 4 (15%).

Lad P_1, P_2, P_3, P_4 og P_5 være fem indbyrdes forskellige projektive punkter, hvoraf ikke tre ligger på linie.

(a) Bevis, at hvis K er en kvadrik, der går gennem disse fem punkter, da er K irreducibel.

(b) Bevis, at hvis K og K' er to kvadrikker, der begge går gennem disse fem punkter, da er $K = K'$.

Nu antages, at der findes indbyrdes forskellige projektive linier L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, N_1, N_2, N_3 og N_4 samt indbyrdes forskellige projektive punkter Q_1, Q_2, R_1, R_2, S_1, S_2 og T, som er forskellige fra P_1, P_2, P_3, P_4 og P_5 og fra skæringspunkterne mellem vilkårlige to af linierne L_1, L_2 og L_3, således at der gælder:

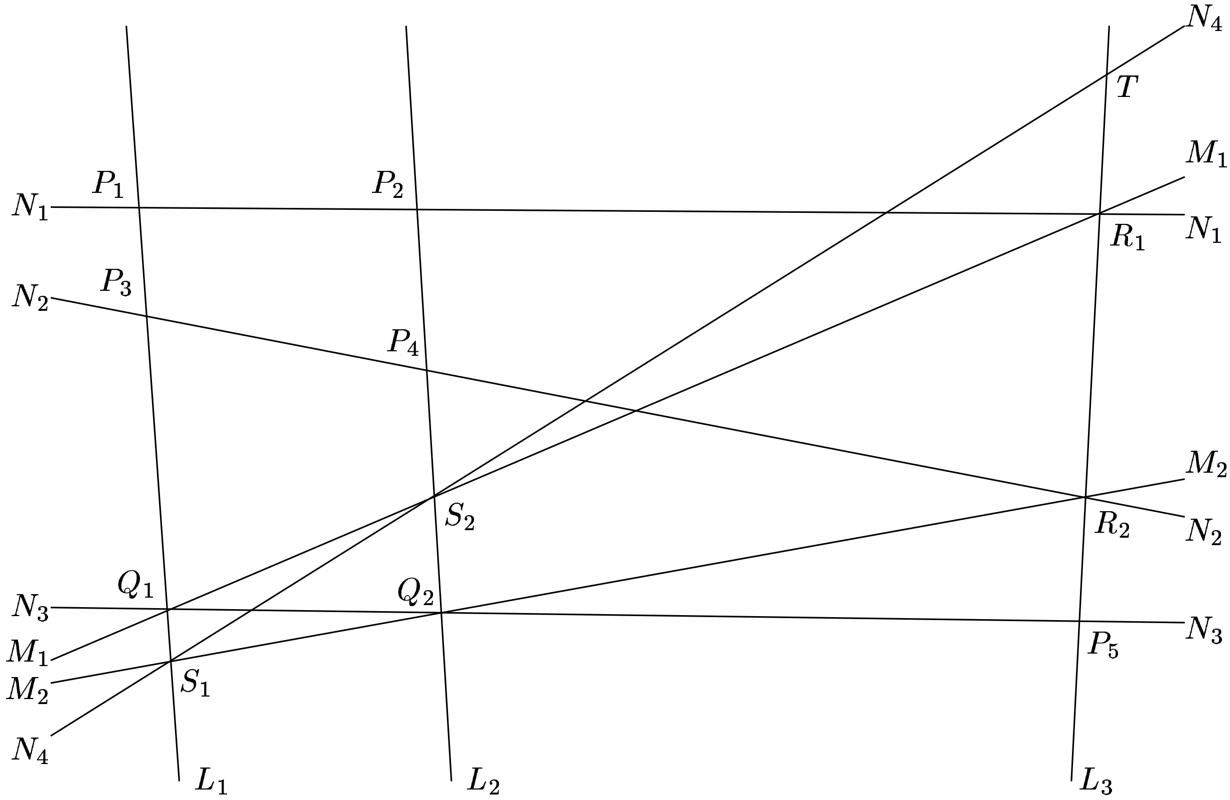
P_1, P_3, Q_1, S_1 ligger på L_1 ;	Q_1, R_1, S_2 ligger på M_1 ;	P_3, P_4, R_2 ligger på N_2 ;
P_2, P_4, Q_2, S_2 ligger på L_2 ;	Q_2, R_2, S_1 ligger på M_2 ;	P_5, Q_1, Q_2 ligger på N_3 ;
P_5, R_1, R_2, T ligger på L_3 ;	P_1, P_2, R_1 ligger på N_1 ;	S_1, S_2, T ligger på N_4 .

På næste side findes en illustrationen af dette; den ønskes ikke gentaget i besvarelsen.

Betragt de projektive kurver $C \stackrel{\text{def}}{=} L_1L_2L_3$, $D \stackrel{\text{def}}{=} M_1M_2$ og $E \stackrel{\text{def}}{=} N_1N_2N_3N_4$.

(c) Bestem $C \bullet D$ og $C \bullet E$, og bevis, at der findes kvadrik gennem P_1, P_2, P_3, P_4 og P_5.

Der er en illustration på næste side



Med venlig hilsen, Hans–Bjørn Foxby